Pedro M. Fialho de Sousa
Professor Associado

SUPERFÍCIE ESFÉRICA I

DUPLA PROJECÇÃO ORTOGONAL

FACULDADE DE ARQUITECTURA-UTL
Departamento de Arquitectura
Secção de Desenho/Geometria/CAD

Janeiro de 1997

NOTA: No texto e nas figuras utilizou-se a nomenclatura convencional para a designação de pontos (letras latinas maiúsculas), linhas rectas (letras latinas minúsculas) e curvas (letras latinas minúsculas dentro de um parêntesis recto), planos (letras gregas minúsculas) e superfícies curvas (letras gregas minúsculas, dentro de um parêntesis recto).

Em algumas figuras nâo estão representados ou designados alguns dos seus componentes geométricos Tal deve-se ao facto, facilmente compreensível, de que a sua representação não ser necessária para a respectiva resolução, tornando assim a leitura de resolução gráfica mais clara.

Também não estão pormenorizadarnente expressas justificações que tenham por base conceitos ou traçados cujo conhecimento tenha sido adquirido em níveis de ensino anteriores ou em capítulos próprios anteriormente estudados. Assim, sempre que tal se verifique, faz-se somente referência ao conceito justificativo.

Na representação da superfície esférica considerou-se sempre o eixo em posição vertical.

Nos textos explicativos e sempre que as operações conducentes a traçados sejam iguais a anteriormente efectuadas, remeter-se-ão para elas para evitar repetições sem interesse objectivo.

Nas aplicações respeitantes a planos tangentes à superfície e respectivos pontos de tangência, usaremos esta designação, como liberdade de linguagem, sem prejuízo da noção de que estes planos são **osculantes** e que o ponto de contacto com a superfície é o **ponto de osculação.**

SUPERFÍCIE ESFÉRICA

1. DEFINIÇÃO E REPRESENTAÇÃO

Uma Superfície Esférica é uma superfície de 2ª ordem[1], de revolução, limitada e fechada, gerada por uma circunferência que roda em torno de um dos diâmetros.

A recta de suporte do segmento do diâmetro considerado, constitui o EIXO da superfície.

A superfície esférica é representada no SDPO pelas projecções dos seus contornos aparentes. Assim a sua projecção vertical é uma circunferência correspondente à projecção vertical do seu contorno aparente verical e a projecção horizontal é também uma circunferência correspondente à projecção horizontal do contorno aparente horizontal da superfície.

2. PONTOS E LINHAS NOTÁVEIS DA SUPERFÍCIE ESFÉRICA (fig. l)

Enunciam-se os pontos e linhas fundamentais para a resolução dos problemas suscitados pela superfície esférica. Em ponto próprio e na sequência imediata deste, apresentam-se algumas definições relativas a esta superfície e ao sólido seu derivado, a esfera, que se consideram úteis para a compreenção global da forma geométrica em em geral.

As circunferências existentes numa superfície esférica são de dois tipos:
Círculos Máximos, se os seus raios forem iguais ao raio da superfície e **Círculos Menores** quando os seus raios forem menores do que o raio da superfície.

Os pontos **P** e **P1**, onde o eixo encontra a superfície, denominam-se **Polos**.

Os círculos máximos que conteem os polos denominam-se **Meridianos**.

O círculo máximo complanar com o centro da superfície e que é perpendicular ao eixo, denomina-se **Equador** e qualquer círculo menor, também perpendicular ao eixo, denomina-se **Paralelo**.

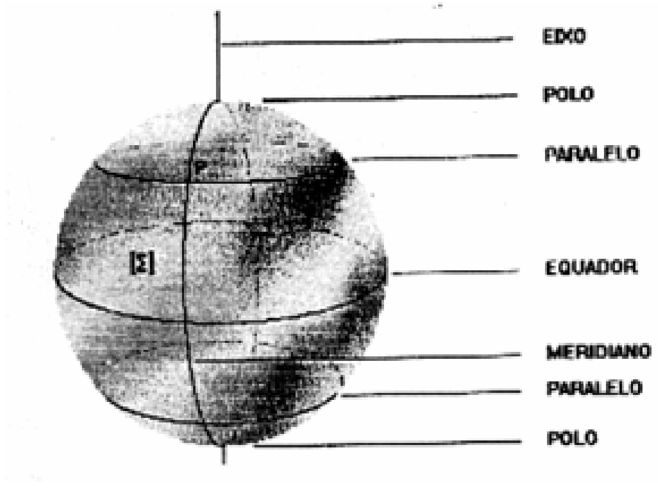


fig.1

' O número de ordem de uma superfície é dado pelo número máximo de pontos que uma recta encontra essa superfície.

2.1. Partes da esfera e da superfície esférica.

Segmento Esférico (fig. 2): Designa cada uma das duas partes da esfera resultantes da intersecção de um plano. Se o plano secante passar pelo centro da esfera, os dois segmentos esféricos são iguais e cada um deles chama-se **semi-esfera** ou **hemisfério.**

Os segmentos esféricos são sólidos de revolução e cada um denomina-se **segmento esférico de uma base**.

Calote Esférica (fig. 3): Chama-se calote esférica (ou zona de uma base) a uma das duas partes da superfície esférica determinadas por um plano secante. A calote esférica é, portanto, a parte curva da superfície de um segmento esférico de uma base.

Zona Esférica (fig. 4): E a parte da superfície esférica compreendida entre dois planos paralelos que intersectam a superfície. A parte da esfera que lhe correspondente designa-se **zona de duas bases.**

Sector Esférico (figs. 5a e 5b): É o sólido gerado por um sector circular, numa rotação completa em tomo de um eixo situado no seu plano, mas que não atravessa esse sector.

Cunha Esférica (fíg. 6): É a parte da esfera compreendida entre entre dois semi-planos cuja origem comum é um diâmetro (ou o eixo).

A superfície curva da cunha esférica designa-se **lúnula esférica** ou **fuso esférico**.

Angulo de um fuso: E o ângulo diedro formado pelos planos dos círculos máximos que limitam o fuso.

Camada Esférica: É o sólido limitado por duas superfícies esféricas concêntricas. A diferença dos dois raios denomina-se espessura da camada.

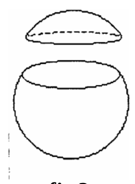


fig.2

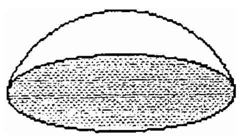


fig. 3

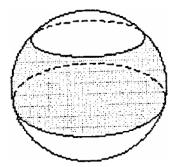


fig. 4

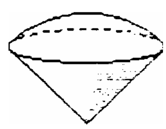


fig. 5a

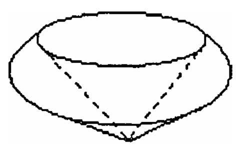


fig. 5b

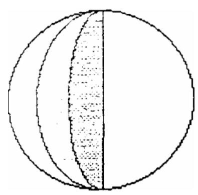


fig. 6

Teorema 1: Qualquer ponto da superfície esférica fica definido pelo cruzamento de dois círculos que passam por esse ponto.

Teorema 2: Para que um ponto pertença à superfície esférica tem de pertencer a uma linha da superfície (normalmente um dos círculos).

2.2. Aplicação

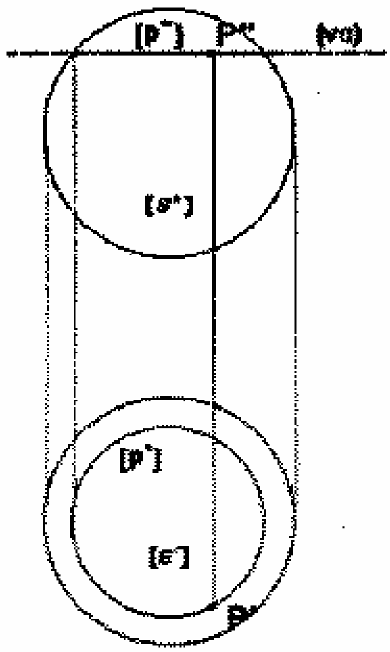
Dada uma das projecções de um ponto da superfície esférica, determinar a outra projecção:

Sejam dados, fig. *7*, a superfície esférica **[**e**]**, que se considera de eixo vertical, com centro em **C**, e **P"** a projecção vertical do ponto **P** da superfície.

Pelo teorema 2 considera-se o ponto **P** como pertencente ao paralelo **[p]**, naturalmente de nível, contido no plano a. Assim **[p"]** terá de conter **P"**; determinando **[p']** (cujo centro é **C'**), sobre este localizar-se-à **P'**.

Note-se que podem existir dois pontos como solução (não representado o segundo), situados no mesmo segmento de topo.

Se fosse dada a projecção horizontal do ponto **P,** a determinação da respectiva projecção vertical far-se-ia por meio de um raciocínio idêntico, a partir da projecção horizontal do paralelo que contivesse a projecção horizontal do ponto.



fíg.7

3. CONCORDÂNCIAS

Teorema 3: Duas superfícies são concordantes quando admitem planos tangentes comuns em todos os pontos da linha de concordância.

A superfície esférica admite como superfícies concordantes, as superfícies cónica e cilíndrica (fig. 8).

Teorema 4: Uma superfície cónica concorda com um superfície esférica segundo um círculo menor, que é directriz da primeira.

Corolário: Se a superfície cónica for concordante segundo um paralelo da superfície esférica, o seu vértice localiza-se no eixo da superfície esférica.

Teorema 5: Uma superfície cilíndrica é concordante com uma superfície esférica segundo um círculo máximo.

Corolário: Se as geratrizes da superfície cilíndrica de concordância tiverem uma direcção paralela ao eixo da superfície esférica, as duas superfícies concordam segundo o equador da superfície esférica.

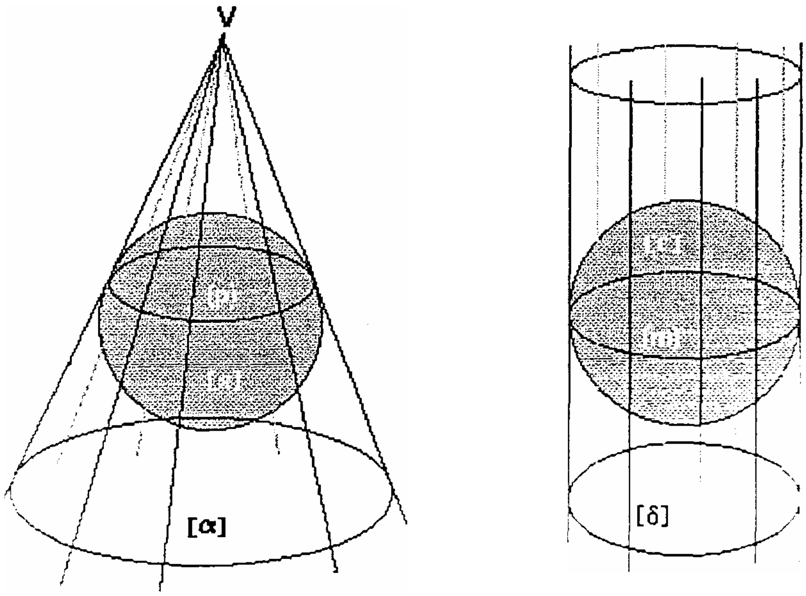


fig. 8

4. SECÇÃO PLANA DA SUPERFÍCIE ESFÉRICA.

A secção plana de uma superfície esférica é sempre uma circunferência que se projecta segundo uma linha curva, fechada, de tipologia (circunferência ou elipse), dependente da posição do plano secante relativamente aos planos de projecção.

Se o plano secante for oblíquo, ambas as projecções da secção são elipses; se o plano for simplesmente projectante (de topo ou vertical), a projecção da secção coincidente com o traço oblíquo, relativamente a LT, é um segmento de recta e a outra é uma elipse. Se o plano secante for de nível ou de frente a projecção da secção coincidente com o traço respectivo é um segmento de recta e a outra é uma circunferência. Se o plano secante for duplamente projectante (de perfil), ambas as projecções da secção são segmentos de recta, coincidentes com os traços do plano.

5. INTERSECÇÃO DE UMA RECTA COM A SUPERFÍCIE ESFÉRICA.

Para determinar os traços de uma recta numa superfície esférica, aplica-se aregra geral para a determinação do/s traço/s de uma recta numa superfície qualquer:

1º Faz-se passar pela recta um plano auxiliar.
2º Determina-se a linha de intersecção deste plano com a superfície.
3º O/s pontos de cruzamento da recta com esta linha de intersecção é/são o/s ponto/s pretendido/s.

Nota: No caso da superfície ser esférica, e excluindo os planos secantes de nível e de frente as secções têm pelo menos uma das projecções elíptica, que sendo uma curva de erro deverá ser evitada a sua utilização, recorrendo a um dos Métodos Auxiliares (Rotações, Rebatimentos ou Mudança de Planos), para a colocação da secção numa posição de leitura e de traçado mais convenientes, isto é de nível ou de frente, para que uma das projecções seja uma circunferência.

6. PLANOS TANGENTES À SUPERFÍCIE ESFÉRICA.

Norma: O plano tangente a uma superfície esférica num ponto desta, deverá ser sempre definido pelas duas rectas tangentes à superfície esférica, que se cruzem nesse ponto.

6.1. Plano tangente à superfície esférica num ponto desta.

<u>1° Método</u> - uso do Teorema l:

Para a marcação do ponto dado **A** (fig 9), marca-se o paralelo **[p]** que o irá conter. Marca-se em seguida, o círculo menor de frente[2] que também contenha **A**.

O plano tangente pretendido ficará definido pelas tangentes **t e t1** aos dois círculos, no ponto **A**. Como facilmente se compreende, a tangente **t** é de nível e a **t1** é de frente, por serem estas as posições dos respectivos círculos de tangência.

[2] Pode ser utilizado qualquer circulo que contenha o ponto, mas a opção por um círculo de frente toma aqui, obviamente, o traçado mais simples e racional.

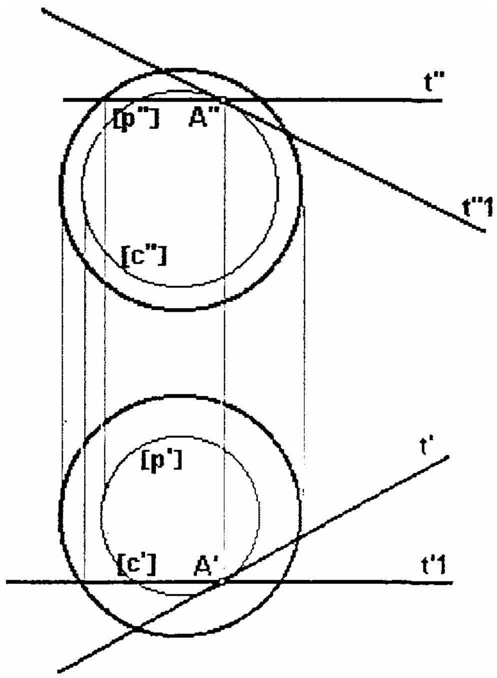


fig. 9

<u>2° Método</u> - uso da superfície cónica concordante:

Consideram-se o paralelo e o meridiano que contêm o ponto dado **T**. O plano tangente q pretendido fica definido pelas tangentes, **t** e **t1**. a estes dois círculos, no ponto **T**.

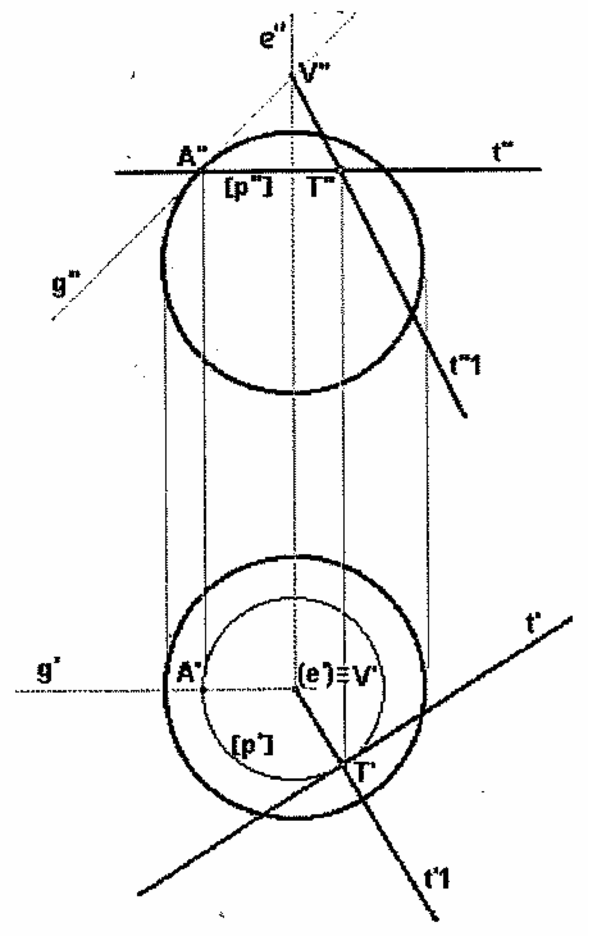
Seja dada, fig.10, a superfície esférica **[e]** de eixo vertical e considere-se o ponto **T** como ponto de tangência pretendido, pertencente ao paralelo **[p]**.

A tangente **t** ao paralelo, no ponto **T**. é de nível e de traçado imediato. A tangente **t1** ao meridiano seria de traçado imediato pouco rigoroso uma vez que aquele é vertical e a sua projecção vertical é, nestas circunstâncias, uma elipse.

Para contornar esta situação marca-se uma superfície cónica de concordância com a esférica segundo o paralelo **[p]**, cujo vértice **V** (ver corolário do teorema 4) é determinado pelo cruzamento do eixo da superfície esférica com uma geratriz **g**, de frente, da superfície cónica; esta geratriz é tangente ao meridiano de frente (contorno aparente vertical) no ponto extremo **A** da projecção vertical do paralelo.

Qualquer geratriz desta superfície cónica é tangente à superfície esférica e consequentemente ao meridiano que contenha qualquer ponto do paralelo.

Assim a recta tangente **t1** é simultaneamente geratriz da superfície cónica e a tangente ao meridiano que passa por **T**, ficando definida pelos pontos **V** e **T**.



fíg.10

6.2. Plano tangente à superfície esférica, contendo um ponto exterior à superfície.

O número de planos que satisfazem a condição é infinito. O lugar geométrico destes planos é uma superfície cónica, concordante com a esférica, cujo vértice é o ponto dado (fig.11). O problema é assim indeterminado se não forem estabelecidas condicionantes.

Antes de estabelecer qualquer condição observe-se ainda na mesma figura que só podem existir planos nas condições pretendidas, compreendidos entre dois paralelos **[p]** e **[p1]**, denominados **paralelos limite.**

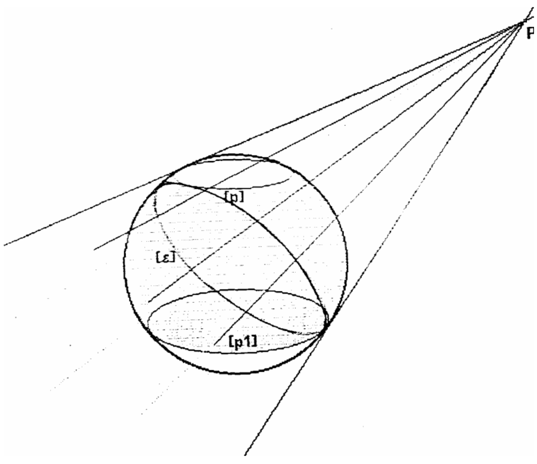


fig. 11

Vejamos como se podem determinar estes paralelos limite.

Sejam dados (fig. 12) a superfície esférica [ε], de centro **C,** eixo vertical e o ponto exterior **P**.

Se determinarmos as rectas tangentes à superfície esférica, em pontos do meridiano **[m]** que exista no mesmo plano do ponto **P,** pelos respectivos pontos de tangência passam os paralelos limite.

Conforme a fig. 13, roda-se o ponto P em torno do eixo da superfície, até se situar no plano de frente que contém o centro **C**. O meridiano que era vertical fica agora de frente, coincidente com o contorno aparente vertical da superfície esférica.

Assim tirando por **P"r** as tangentes **t"r** e **t"lr** a **[m"r]** obtêm-se **T"r** e **T"lr** por onde passam as projecções verticais dos paralelos limites, uma vez que a rotação tendo sido feita em tomo de um eixo vertical, os arcos descritos são de nível. Conhecendo as projecções verticais dos paralelos é imediata a determinação das respectivas projecções horizontais.

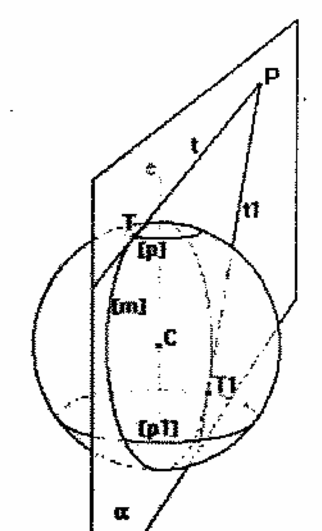


fig. 12

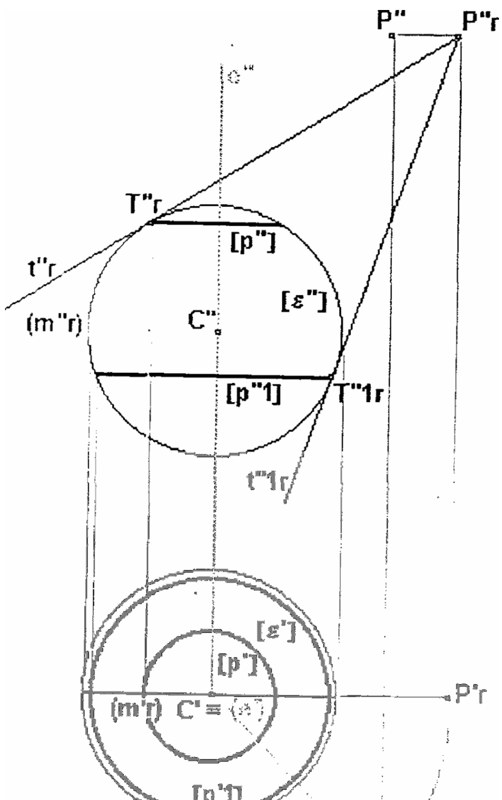


fig. 13

Regressemos à determinação dos planos tangentes à superfície esférica contendo o ponto exterior **P**.

<u>1° Método</u>: Utilização da superfície cónica concordante com vértice no ponto **P:**

Considera-se (fig.14) um plano p que contenha o ponto **P** e o centro **C** da superfície esférica. Este plano seccionará a superfície segundo um círculo máximo **[c]** ; as rectas tangentes **t** e **t1** a este círculo tiradas pelo ponto **P** não são mais do que as geratrizes da secção produzida por p na superfície cónica concordante. Os pontos de tangência **T** e **Tl** serão os pontos de contacto dos planos tangentes pretendidos; existirão assim dois planos tangentes e cada um ficará definido pela tangente determinada e pela tangente (de nível) ao paralelo (não representado) que contenha o ponto de tangência.

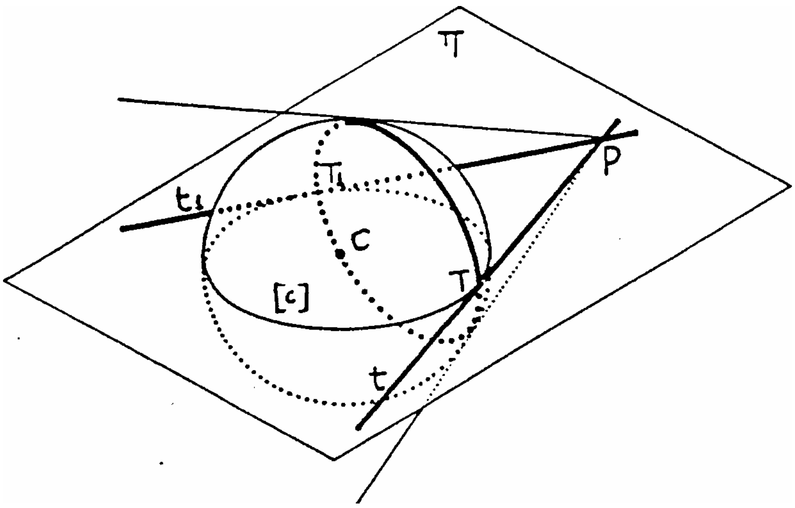


fig. 14

Para a resolução gráfica (fig. 15), considera-se o plano projectante vertical p que contenha **C** e **P**, como o plano secante, cuja secção produzida na superfície esférica é o círculo **[c]**. Este círculo estando de topo tem como projecção horizontal uma elipse (não representada) o que não permite um traçado rigoroso das tangentes. Rodando o plano em torno do eixo de topo **e**, que contenha **C,** até uma posição de nível, a secção **[cr]** fica coincidente com o equador da superfície esférica e o ponto **P** adquire a posição **Pr**.

Por **P'r** tira-se a tangente **t'r** a **[c'r]** obtendo-se o ponto de tangência **T'r** cuja projecção vertical **T"r** se localiza em **[c"r]**; desfazendo a rotação, para a posição inicial, obtem-se **T**° **T'.T"** ficando a tangente **t**° **P.T**. A tangente **t1** ao paralelo (não representado por não ser necessário o seu traçado) é de nível, logo a sua projeção vertical **t"l** contem **T"** e a projecção horizontal, **t'l**, contem **T'** e é perpendicular à projecção horizontal do raio da superfície esférica definida pelo segmento **C'T'**.

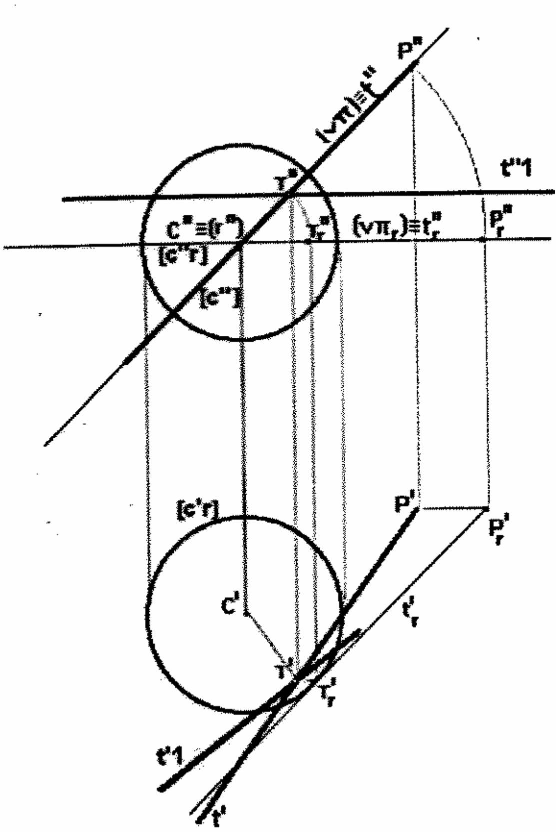


fig. 15

2° Método - Uso da superfície cónica concordante, com vértice no eixo da superfície esférica:

Aplica-se este método quando se põe como condição que os pontos de tangência pertençam a um paralelo determinado, localizado, naturalmente, entre os paralelos limite, o que deixa pressupor que se deverá determinar previamente estes e "a posteriori" localizar o paralelo pretendido entre aqueles. Se o paralelo pretendido se localiza entre os planos limite existem duas soluções para o problema, se coincidir com um qualquer deles existirá uma única solução, se se localizar fora da zona compreendida entre os paralelos limite o problema não tem qualquer solução.

Seja dada a superfície esférica **[e]** e fixado o paralelo **[p]** (fig.16)[3]. Faz-se concordar com a superfície esférica dada uma superfície cónica cuja linha de concordância é o paralelo **[p]**, sendo este, assim, a directiz da superfície cónica. O problema fíca transformado (Teorema 3) na determinação do plano tangente (note-se que há dois) à superfície cónica, passando pelo ponto P.

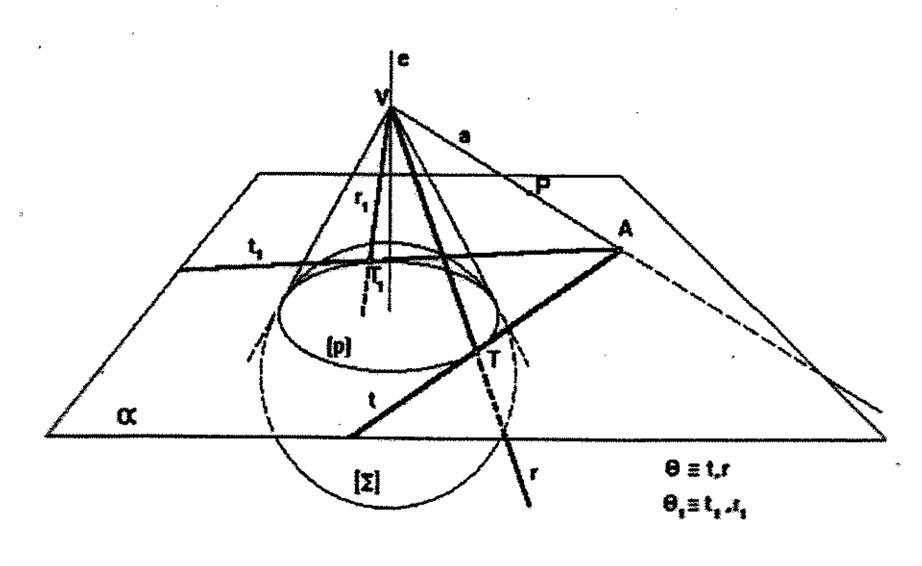


fig. 16

---
[3] Para simplificação da leitura da figura não se encontram representados os paralelos limite.

Para a resolução gráfica (fig. 17) determina-se o vértice V da superfície cónica utilizando o mesmo traçado que foi aplicado em 6.1., 2° método: marca-se a recta a definida por **V** e **P**; em seguida determina-se o traço **A** desta recta, no plano α do paralelo. Por este ponto A tirar-se-iam as tangentes ao paralelo, estando na figura só representada uma delas, **t,** que lhe é tangente no ponto **T**, que com **V** define **r** em situação de resolução em tudo igual à utilizada na mesma aplicação atrás referida.

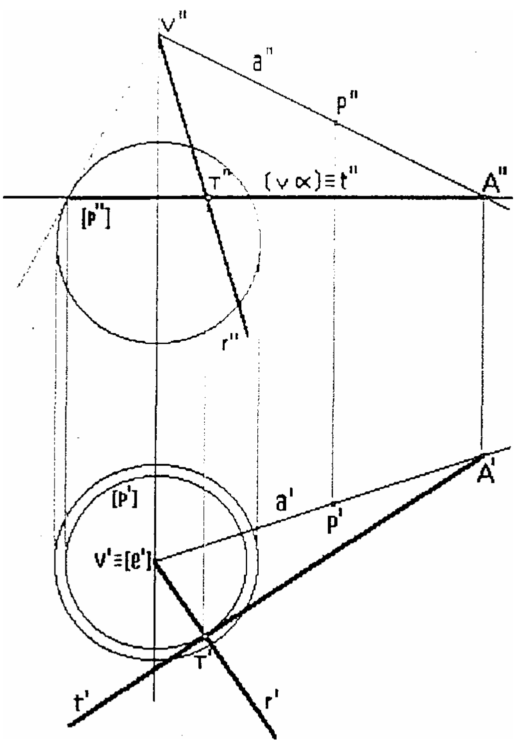


fig.17

6.3. Plano tangente à superfície esférica, paralelo a uma recta exterior à superfície.

Facilmente se compreende que o problema tem infinitas soluções pois de facto existe um número infinito de planos (∞ - 1, onde a excepção será o que contem a recta) que satisfazem a condição, cujo lugar geométrico é uma superfície cilíndrica de concordância com a esférica, cujas geractrizes são paralelas à recta dada (fig. 18). O lugar geométrico dos pontos de contacto desses planos tangentes, com a superfície esférica, é a circunferência limite do círculo máximo **[m]** que existe num plano p que contém o centro da superfície esférica e é perpendicular à recta dada r.

Note-se que este círculo máximo existe numa zona esférica limitada pêlos paralelos limite **[p]** e **[p1].**

Vejamos como se podem determinar estes paralelos limite[4]. Considere-se o plano definido pela recta exterior dada e pelo centro de superfície esférica, que a seccionará segundo um círculo máximo.

As rectas tangentes a este círculo e paralelas à recta dada, definem os pontos de tangência que contêm, cada um deles, um dos paralelos limite.

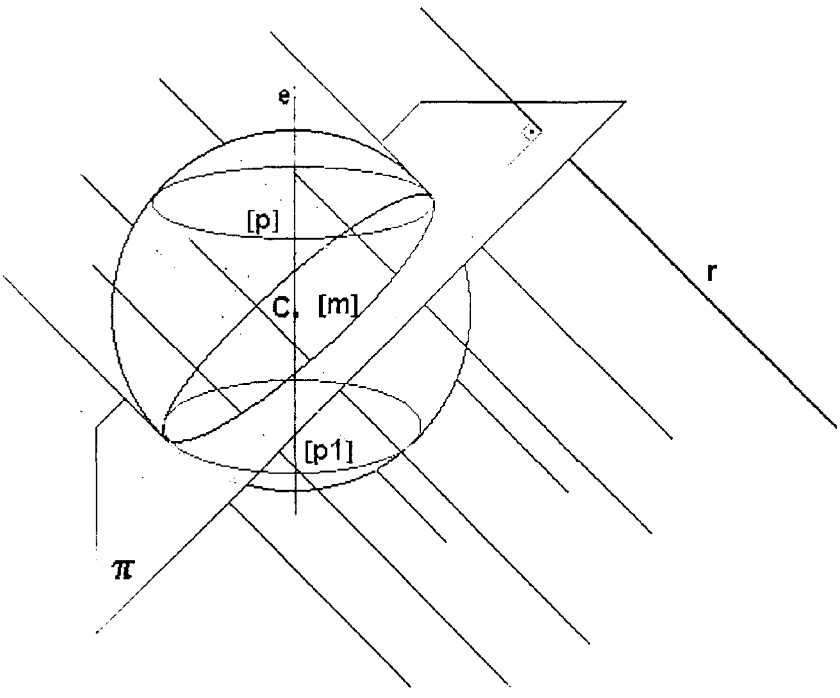


fig. 18

[4] Não se apresenta a resolução gráfica, sugerindo a sua execução como exercício complementar.

<u>1° Método</u> - Plano tangente num ponto qualquer da linha de concordância **[m]** .

Sejam dados a superfície esférica **[e]**, de centro **C**, e a recta exterior **r** (fig. 19). Determinam-se os traços, **h**p e **v**p, nos planos de projecção[5] do plano p que contem **C** e é perpendicular a **r**, utilizando uma recta de frente **f** de p, que passa por **C,** sendo, naturalmente, **f** perpendicular a **r''**.

Considera-se um paralelo **[p]** qualquer onde irá existir o ponto de tangência do plano tangente. Determina-se a recta **n** (de nível) de intersecção entre o plano d do paralelo e o plano dado p. Esta recta cruzará o paralelo em dois pontos, dos quais só um. **T º T';T"**, está representado e que será o ponto de tangência do plano.

O plano tangente ficará definido pela tangente **t** (de nível) ao paralelo, no ponto **T**. e pela recta a paralela à recta dada **r** tambem contendo **T**.

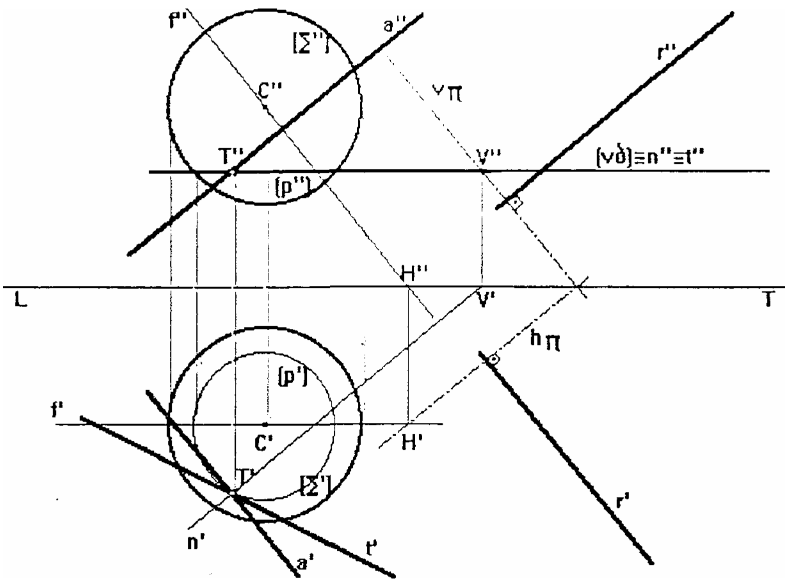


fig. 19

[5] Utiliza-se aqui a Linha de Terra para facilitar o traçado e arespectiva leitura. Sem tal ter-se-ia de definir o plano secante π por duas rectas (a de nível e a de frente) concorrentes no centro C da superfície esférica o que iria somente complicar o traçado da resolução. Como puro exercício académico pode-se sugerir a resolução por esta via.

<u>2° Método</u> - Uso da superfície cónica de concordância com a superfície esférica, com vértice no eixo da segunda.

Este método utiliza-se quando o ponto de tangência pertence a um paralelo determinado.

Considere-se a superfície esférica **[e]**, a recta exterior **r** e fixemos o paralelo **[p]** (fig. 20). Se colocarmos a superfície cónica **[p]** de concordância segundo o paralelo, que lhe serve de directriz e com vértice no ponto **V**, o problema fica transformado na determinação do plano tangente (existem dois planos) à superfície cónica, de directriz **[p]** e vértice **V**, paralelo à recta **r** cujo traçado já se conhece.

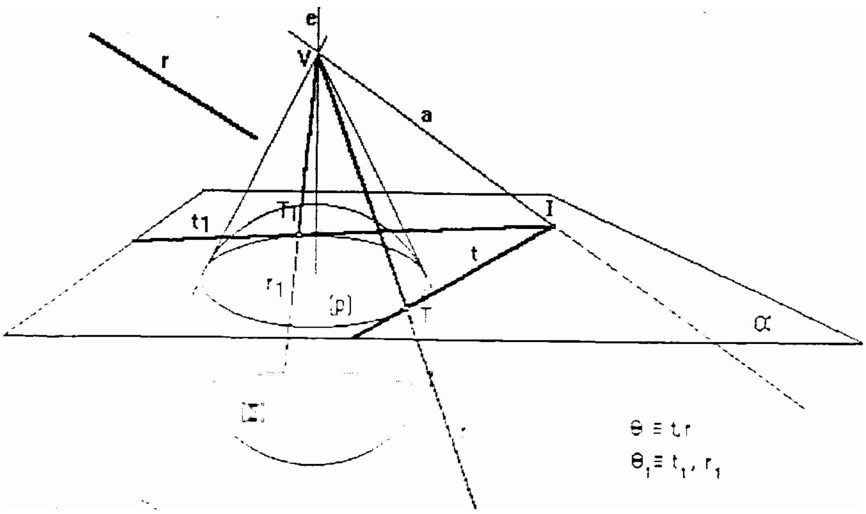


fig. 20

Para o traçado gráfico (fig. 21), considere-se a superfície esférica **[e]** e fixemos o seu paralelo **[p]** onde pretendemos que exista o ponto de tangência.

Determinando a superfície cónica concordante com a esférica, segundo o paralelo definido, utilizando o mesmo processo aplicado em 6.1., 2° método: faz-se passar por **V** um recta a paralela à recta dada **r**; determina-se o traço **I ° I';I"** da recta a no plano a do paralelo. A determinação das rectas tangentes, **t** e **t1**, que definem o plano tangente e que concorrem no ponto de tangência **T**, é feita pelo mesmo processo aplicado em 6.2, 2° método.

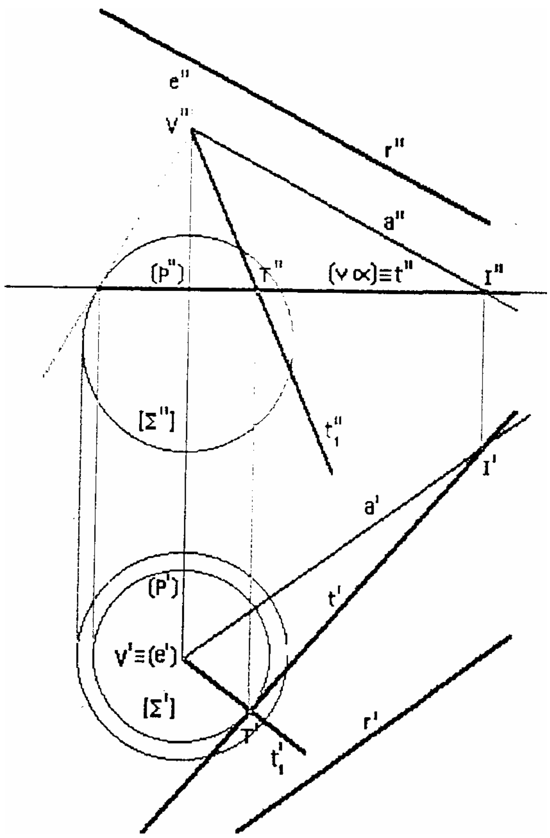


fig. 21

6.4. Plano tangente à superfície esférica, paralelo a um plano dado.

Considerando (fig. 22) a superfície esférica **[e]** e o plano a , existem dois planos, p e d, que são paralelos a a e tangentes à superfície esférica, em dois pontos **E** e **S**, que são os pontos de intersecção da superfície esférica com uma recta **r** que contém o centro **C** da superfície e é perpendicular ao plano a .

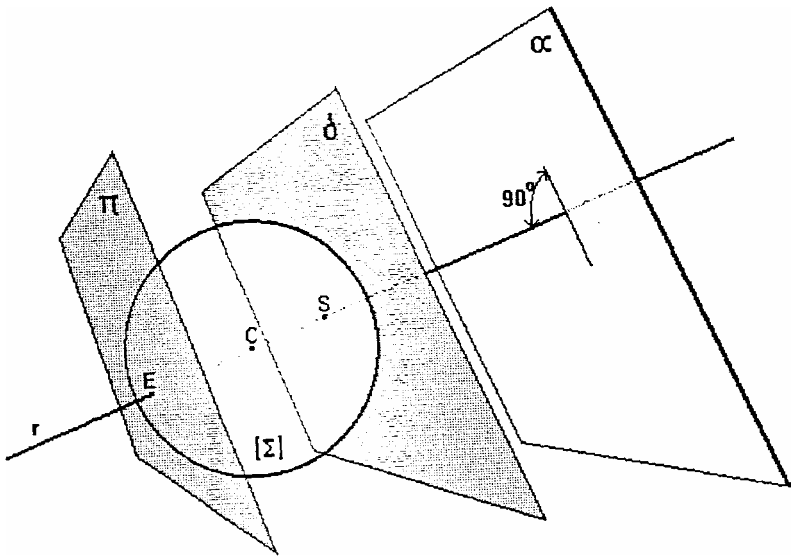


fig. 22

Para a resolução gráfica (fig. 23), faz-se passar pelo centro **C** da superfície uma recta **r** perpendicular ao plano dado a , ficando **r'** ^ **h**a e **r"** ^ **v**a [6] e determinam-se os pontos **E** e **S** de intersecção de **r** com a superfície esférica, aplicando a regra geral para a determinação do traço (ou dos traços) de uma recta numa superfície qualquer (ver ponto 5.), começando por conduzir por **r** um plano auxiliar w, aqui projectante vertical. Este plano seccionará a superfície esférica segundo um círculo máximo **[m]**, cuja representação se omite por desnecessária; bastará reconhecer que **[m"]** estará sobre **v**a e **[m']** é uma elipse de traçado não rigoroso e este traçado, como se verá, não tem interesse para a resolução do problema.

Utilizando um raciocínio idêntico aplicado em 6.2., 1° Método: roda-se o plano w para uma posição de nível, em tomo de um eixo de topo **(t)** que contenha **C**. A secção **[m]** virá a coincidir com o equador da superfície esférica e a recta tomará a posição de nível **rr**.

Onde **r'r** cruza o equador (secção **[m]** rodada) localizam-se as projecções horizontais rodadas dos pontos pretendidos, **E'r** e **S'r**, dos quais não é necessário a representação das respectivas projecções verticais. Invertendo as rotações de **E'r** e de **S'r** para **r**[7] inicial, obtêm-se as projecções horizontais. **E'** e **S'** sobre **r'**, cujas projecções verticais **E"** e **S"** se localizam sobre **r"**.

Na figura só está representado um dos planos tangentes, o que o é no ponto **E**, e que fica definido por duas rectas, **n** e **f,** concorrentes nesse mesmo ponto (recorde-se a condição de paralelismo entre dois planos), sendo **n** de nível e paralela a **h**a (note-se que esta recta é também a tangente ao paralelo que contem **E**) e **f** de frente paralela a **v**a.

[6] Define-se aqui o plano a pelos seus traços nos planos de projecção, para evitar traçados de expressão linear complexa, que existiriam se o plano fosse definido por rectas, sem ganho de compreensão metodológica. Sugere-se, como puro exercício académico, a resolução utilizando a definição do plano referida.

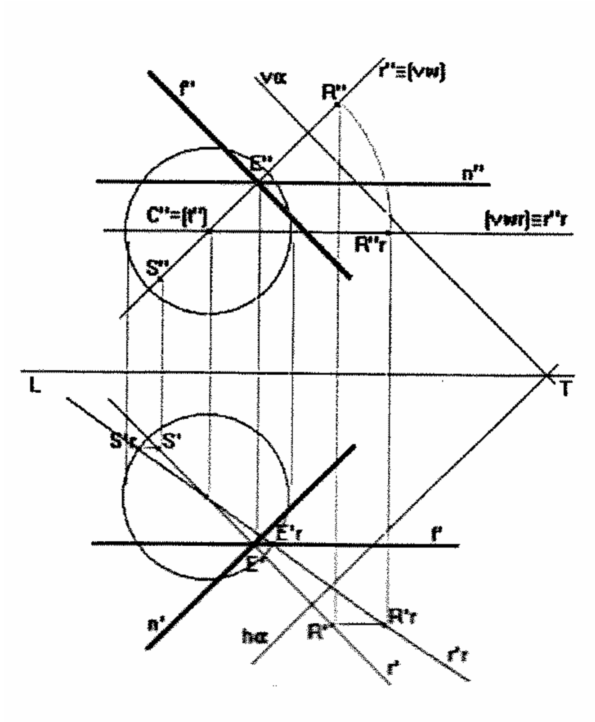


fig. 23

6.5. Plano tangente à superfície esférica, contendo uma recta exterior á superfície.

Conforme se pode reconhecer (fie. 24) o problema tem duas soluções. Existem dois planos, a e p, que passando pela recta **r** (note-se que **r** é a recta de intersecção dos dois planos), são tangentes à superfície esférica nos pontos **T** e **Tl** existentes num círculo máximo **[m]**. Este círculo máximo existe num plano d que é perpendicular à recta **r**. Os pontos **T** e **Tl** são os pontos de tangência das rectas, **t** e **t1** respectivamente, tangentes à superfície esférica tiradas pelo ponto **I**. de intersecção de **r** com d.

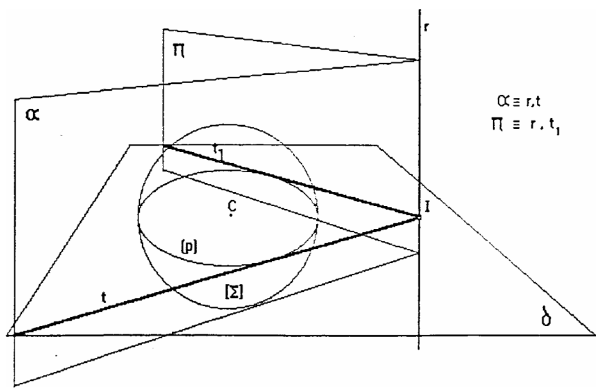


fig.24

Para a resolução gráfica (fig. 25), considerem-se dados a superfície esférica **[e]** e a recta **r,** numa posição de frente[7]. Marca-se o plano d contendo **C** e perpendicular a **r** (d é, portanto, um plano de topo, sendo **v**δ ⊥ r") e determina-se o traço **I** de **r** em d, que é imediato visto d ser projectante vertical.

Considerando um eixo de topo contendo **C** e rodando d até uma posição de nível, a sequência operativa é em tudo igual à aplicada no ponto 6.2., 1° Método. No final os plano tangentes pretendidos ficam definidos pelas rectas tangentes **t** e **t1** e pela recta dada **r**. Sugere-se a execução dos traçados para definição dos planos tangentes de acordo com a Norma enunciada no ponto 6.

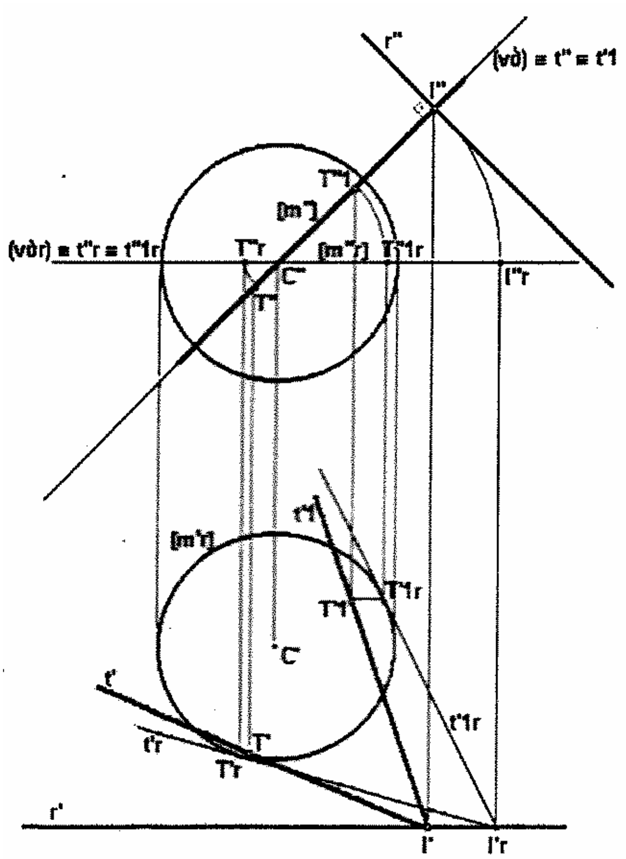


fig.25

[7] Usa-se uma recta de frente para tornar o traçado mais explicito. A opção por outra recta qualquer, naturalmente possível, obrigaria à execução de um traçado mais complexo, obrigando ainda, na sequência, à aplicação de um qualquer método gráfico auxiliar sobre planos oblíquos. Para comprovação desta complexidade do traçado pode-se sugerir, sem que a sequência operativa se altere, a sua execução, como puro exercício académico.