FACULDADE DE ARQUITECTURA DA UNIVERSIDADE TÉCNICA DE LISBOA

ÁREA CIENTÍFICA DE DESENHO E COMUNICAÇÃO *GRUPO DE DISCIPLINAS DE GEOMETRIA*

EXERCÍCIOS

PERSPECTIVA – (exercícios resolvidos) ***P_er _01***

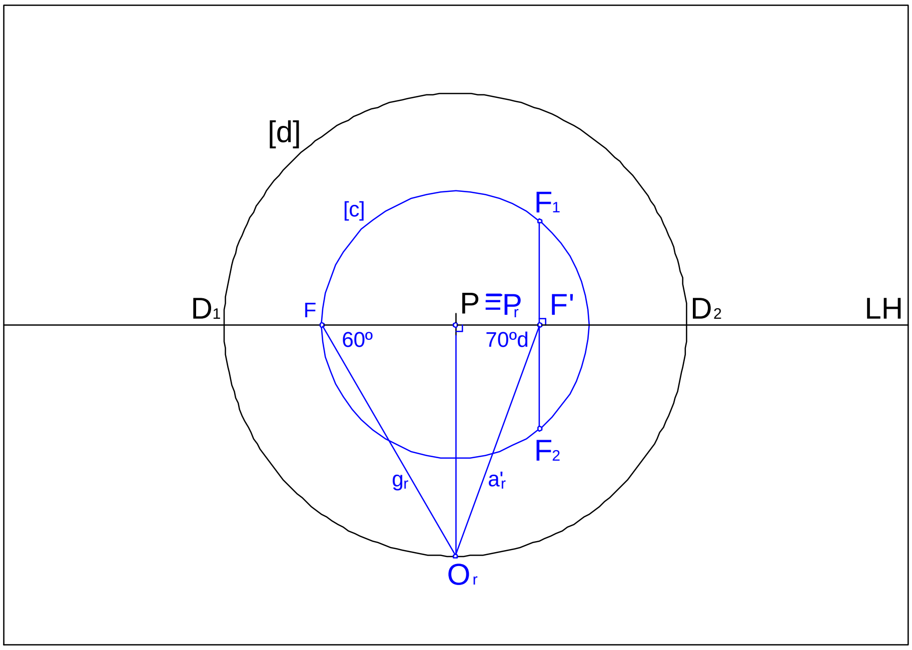
2006

1) Pontos de Fuga.

Problema:

Dado um sistema perspéctico em que é conhecida a Linha do Horizonte e a distância do Observador ao Quadro (dada pela circunferência de distância **[d]**) determine o ponto de fuga de uma direcção de rectas a 60º com o Quadro cuja projeção horizontal faz 70º a.p.d. com a Linha do Horizonte.

Resolução:



Para determinar o ponto de fuga da direcção pretendida é preciso determinar o traço no quadro de uma recta com essa direcção, por exemplo uma recta **a**, passante pelo Observador **O**.

Essa recta deverá ter uma projecção ortogonal no plano do horizonte, **a’**, a 70º a.p.d. com a Linha do Horizonte e deverá pertencer a uma superfície cónica de revolução de vértice **O** e eixo **O.P** . A recta **a’** intersecta o quadro num ponto **F’** que é a projecção ortogonal, no plano do horizonte, do ponto de fuga pretendido.

A referida superfície cónica intersecta o Quadro segundo uma circunferência **[c]** que é o lugar geométrico de todos os pontos de fuga de todas as direcções de rectas a 60º com o quadro.

Para determinar graficamente a recta **a’**, considera-se o rebatimento do plano do horizonte para o quadro em torno da recta **LH**. Neste movimento o ponto $\mathbf{O_r}$ fica na intersecção da circunferência **[d]** com a recta perpendicular a **LH** baixada de **P**. Note-se que **P**° $\mathbf{P_r}$.

Pelo ponto **O**$_r$ pode conduzir-se a recta **a’**$_r$ a 70º a.p.d. com a LH determinando **F’**. Note-se que **F’**º **F’**$_r$.

A superfície cónica intersecta qualquer plano que contenha o seu eixo segundo duas geratrizes a 60º com o quadro. Por exemplo, o plano do horizonte intersecta a superfície cónica segundo duas rectas **g** e **g**$_1$ de nível a 60º com o quadro. Identifique-se por **F** o ponto de intersecção da recta **g** com o quadro.

Fazendo uso do rebatimento do plano do horizonte pode determinar-se a recta **g**$_r$ passante por **O**$_r$, a 60º com a **LH**. A recta **g**$_r$ intersecta a **LH** no ponto **F**. Note-se que **F**º **F**$_r$.

Pelo ponto **F** passa a circunferência **[c]**.

Sabendo que **F’** é a projecção no plano do horizonte do ponto de fuga pretendido, e que este deverá estar contido na circunferência **[c]**, nada mais resta do que conduzir a perpendicular a **LH** passante por **F’** e determinar a sua intersecção com a circunferência **[c]**. Notamos, pois, que existem duas soluções para o problema. Tratam-se dos pontos **F**$_1$ e **F**$_2$.

2) Pontos de Fuga.

<u>Problema:</u>

Dado um sistema perspéctico em que é conhecida a Linha do Horizonte e a distância do Observador ao Quadro (dada pela circunferência de distância **[d]**) determine o ponto de fuga de uma direcção de rectas cuja projecção ortogonal no quadro faz 45º a.p.d. e cuja projecção ortogonal no plano do horizonte faz 60º a.p.e..

<u>Resolução:</u>

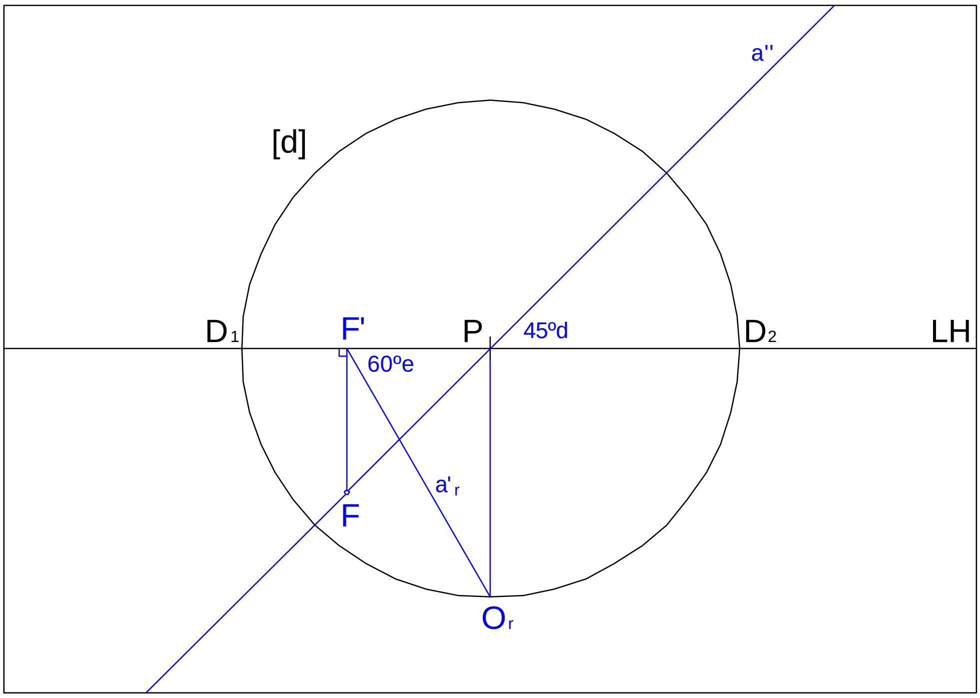
Para determinar o ponto de fuga pretendido é preciso determinar o traço no quadro de uma recta com essa direcção, por exemplo uma recta **a**, passante pelo observador **O**.

A projecção ortogonal da recta **a** no quadro é uma recta **a’’** passante por **P** (note-se que **P** é a projecção ortogonal de **O** no quadro) que pode ser traçada directamente.

A projecção ortogonal da recta **a** no plano do horizonte é uma recta **a’** que intersecta a **LH** num ponto **F’** (projecção ortogonal, no plano do horizonte, do ponto de fuga pretendido).

Para determinar graficamente a recta **a’** e o ponto **F’** procedemos ao rebatimento do plano do horizonte para o quadro (ver explicações dadas no exercício resolvido 01).

Pelo ponto **F’** conduz-se uma recta perpendicular a **LH** que intersecta **a’’** no ponto **F**, o ponto de fuga pretendido.

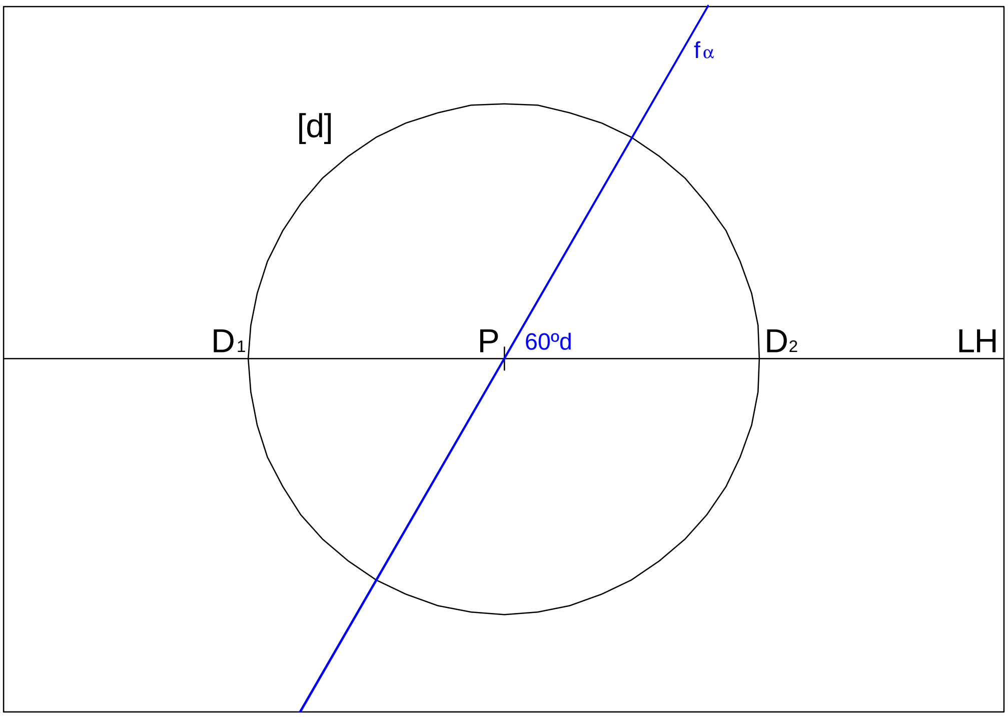


3) Linhas de Fuga.

Problema:

Dado um sistema perspéctico em que é conhecida a Linha do Horizonte e a distância do Observador ao Quadro (dada pela circunferência de distância **[d]**) determine a linha de fuga de uma orientação de planos ortogonal ao quadro a 60º a.p.d. com o plano do horizonte.

Resolução:



Para determinar a linha de fuga pretendida é preciso determinar o traço no quadro de um plano, com essa orientação, por exemplo um plano a , passante pelo observador **O**.

A resolução é directa uma vez que o traço do referido plano a passa pelo ponto **P** e faz com a **LH** um ângulo que mede a verdadeira grandeza do diedro formado pelos planos a e plano do horizonte.

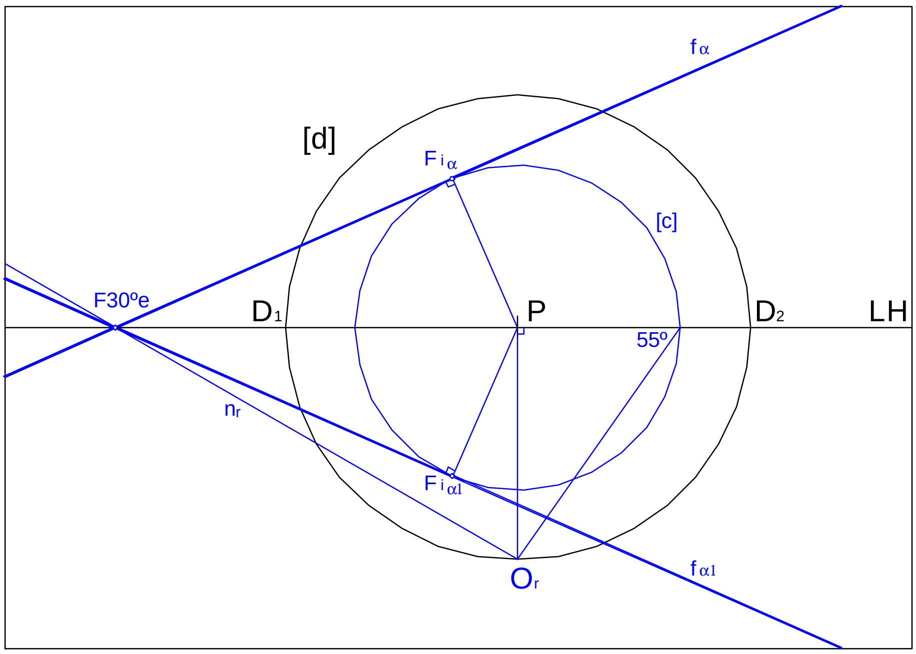
O traço do plano a é designado por $\mathbf{f}_a$ e é a linha de fuga da orientação pretendida.

4) Linhas de Fuga.

<u>Problema:</u>

Dado um sistema perspéctico em que é conhecida a Linha do Horizonte e a distância do Observador ao Quadro (dada pela circunferência de distância **[d]**) determine a linha de fuga de uma orientação de planos a 55º com o quadro que admite a direcção de nível a 30º a.p.e. com o quadro.

<u>Resolução:</u>



Para determinar a linha de fuga pretendida é preciso determinar o traço no quadro de um plano, com essa orientação, por exemplo um plano a , passante pelo observador **O**.

Como o plano a admite a direcção de nível a 30º a.p.e. com o quadro, então deverá conter uma recta **n** com esta direcção passante pelo observador **O**.
A recta n intersecta o quadro num ponto **F** (ponto de fuga da direcção de nível a 30º a.p.e. com o quadro) pelo qual passa o traço do plano a (ver explicações dadas no exercício resolvido 01).

Como o plano a faz 55º com o quadro então deverá ser tangente a uma superfície cónica de revolução de vértice **O** e eixo **O.P**.

A superfície cónica intersecta o quadro segundo uma circunferência **[c]** (ver explicações dadas no exercício resolvido 01) à qual o traço de a no quadro deverá ser tangente.

Daqui conclui-se que o problema têm duas soluções que correspondem às duas rectas tangentes à circunferência **[c]** conduzidas pelo ponto **F** (note que o problema poderia não ter soluções se **F** fosse interior ao circulo de **[c]** ou ter apenas uma solução se **F** pertencesse à circunferência **[c]**).

As duas soluções estão identificadas por $\mathbf{f}_a$ e $\mathbf{f}_{a\mathbf{1}}$ correspondendo às linhas de fuga pretendidas.

Notemos que os pontos de tangência de $\mathbf{f}_a$ e $\mathbf{f}_{a\mathbf{1}}$ com a circunferência **[c]**, $\mathbf{Fi}_a$ e $\mathbf{Fi}_{a\mathbf{1}}$ respectivamente, são os pontos de fuga das direcções

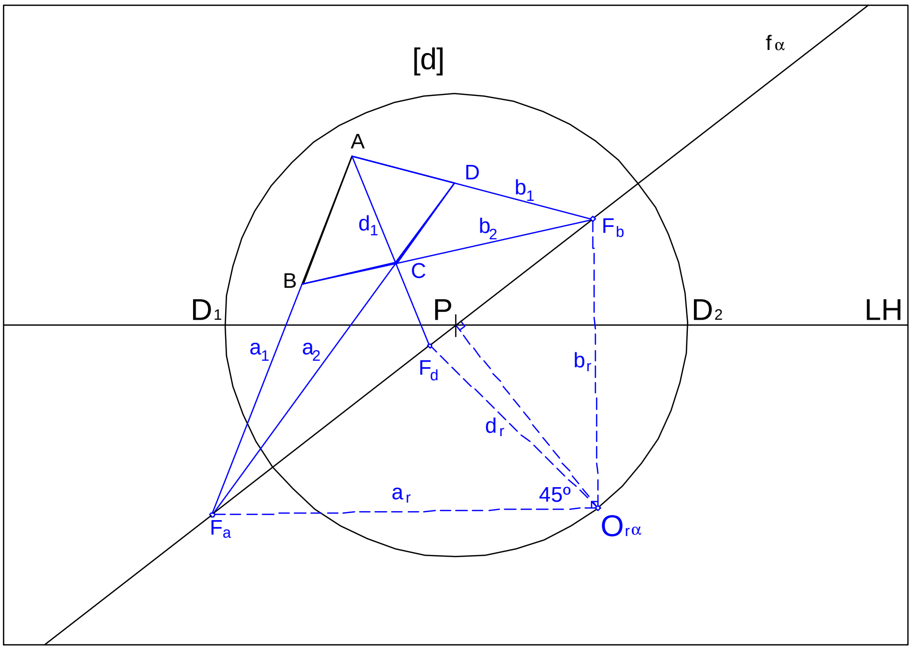
5) Controlo direccional.

<u>Problema:</u>

Considere um sistema perspéctico em que é conhecida a Linha do Horizonte e a distância do Observador ao Quadro (dada pela circunferência de distância **[d]**).

Sabendo que o segmento **[AB]** é a perspectiva de um lado de um quadrado **[ABCD]** contido num plano com a orientação a ortogonal ao quadro, determine uma perspectiva possível do quadrado.

<u>Resolução:</u>



Em primeiro lugar prolonga-se o segmento **[AB]** até este intersectar a linha de fuga $\mathbf{f}_a$ determinando o ponto de fuga $\mathbf{F_a}$.

O ponto $\mathbf{F_a}$ corresponde à direcção a de dois lados do quadrado.

Os outros dois lados têm direcção **b**, ortogonal à direcção **a**, estando contida na orientação a.

Para determinar o ponto de fuga da direcção **b**, isto é $\mathbf{F_b}$, é necessário determinar o traço no quadro de uma recta projectante **b** (contida no plano projectante com a orientação a) perpendicular à recta projectante **a** (recta projectante que passa pelos pontos $\mathbf{F_a}$ e **O**).

Para o efeito considera-se o rebatimento projectante com a orientação a (plano que contém as rectas projectantes **a** e **b** perpendiculares entre si) para o quadro em torno de $\mathbf{f}_a$ (há dois sentidos possíveis para este movimento).

Neste movimento o ponto $\mathbf{O_r}$ fica na intersecção da circunferência **[d]** com a perpendicular a $\mathbf{f}_a$ baixada de **P**.

Tendo $\mathbf{O_r}$, pode determinar-se $\mathbf{a_r}$ (note-se que $\mathbf{F_a}$ ° $\mathbf{F_{ar}}$) e perpendicularmente a $\mathbf{a_r}$ pode conduzir-se $\mathbf{b_r}$ determinando o ponto $\mathbf{F_b}$ em $\mathbf{f}_a$ (note-se que $\mathbf{F_b}$ ° $\mathbf{F_{br}}$).

Pelo ponto $\mathbf{F_b}$ podem conduzir-se as perspectivas das rectas $\mathbf{b_1}$ e $\mathbf{b_2}$ (rectas que contêm os lados **[AD]** e **[BC]** do quadrado).

Para determinar o ponto **C**, por exemplo, é necessário conhecer a direcção **d** da diagonal **[AC]** do quadrado. Com efeito, sabemos que esta faz **45º** com os lados do quadrado pelo que, se conduzirmos a recta $\mathbf{d_r}$ a **45º** com as rectas $\mathbf{a_r}$ e $\mathbf{b_r}$ podemos determinar o ponto $\mathbf{F_d}$ (ponto de fuga de uma das direcções de diagonais do quadrado).

Pelo ponto $\mathbf{F_d}$ e pelo ponto **A** conduzimos a recta $\mathbf{d_1}$ que intersecta a recta $\mathbf{b_2}$ no ponto **C**.

Pelo ponto **C** podemos conduzir a recta $\mathbf{a_2}$ que intersecta a recta $\mathbf{b_1}$ no ponto **D** finalizando assim a representação do quadrado (note-se que existem duas perspectivas possíveis para o quadrado uma vez que a partir de um segmento contido num plano podem construir-se dois quadrados nesse plano).

6) Controlo direccional.

<u>Problema:</u>

Considere um sistema perspéctico em que é conhecida a Linha do Horizonte e a distância do Observador ao Quadro (dada pela circunferência de distância **[d]**).

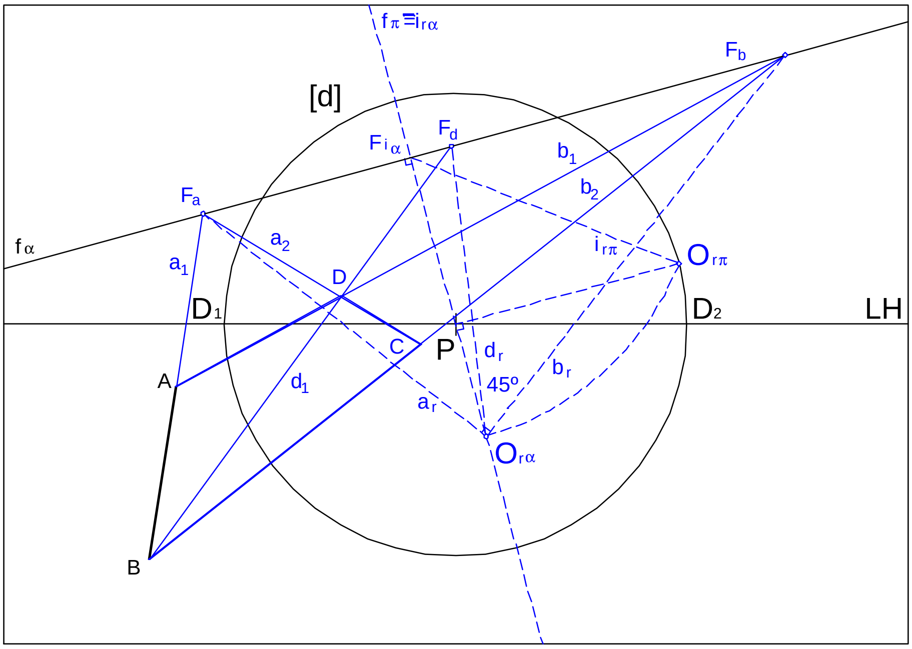
Sabendo que o segmento **[AB]** é a perspectiva de um lado de um quadrado **[ABCD]** contido num plano com a orientação a oblíqua ao quadro, determine uma perspectiva possível do quadrado.

<u>Resolução:</u>

A resolução obedece, em todos os passos, ao descrito para o exercício resolvido 05.

A diferença consiste no rebatimento do plano projectante com a orientação a que neste caso é oblíquo ao quadro. Daqui resulta que o ponto $\mathbf{O_{r}}_a$ não pertence à circunferência **[d]**.

No rebatimento do plano referido, o ponto **O** descreve um arco de circunferência contido num plano projectante perpendicular a $\mathbf{f}_a$. Trata-se do plano cujo traço no quadro está notado por $\mathbf{f}_p$.



Logo o ponto $\mathbf{O}_{\mathbf{r}a}$ deverá estar contido em $\mathbf{f}_p$.

O centro do arco do rebatimento do ponto **O** (em torno da charneira $\mathbf{f}_a$) é o ponto comum a $\mathbf{f}_a$ e a $\mathbf{f}_p$, isto é, o ponto $\mathbf{F}_{\mathbf{i}a}$ (ponto de fuga da direcção **i** de maior inclinação da orientação a).

Para obter o ponto $\mathbf{O}_{\mathbf{r}a}$ procede-se a um rebatimento auxiliar, o rebatimento do plano que contém o arco do rebatimento do ponto **O** (em torno da charneira $\mathbf{f}_p$).

Neste movimento o ponto $\mathbf{O}_{\mathbf{r}p}$ fica na intersecção da circunferência **[d]** com a perpendicular a $\mathbf{f}_p$ conduzida por **P**.

A distância entre $\mathbf{O}_{\mathbf{r}p}$ e $\mathbf{F}_{\mathbf{i}a}$ corresponde ao raio do arco do rebatimento do ponto **O** em torno de $\mathbf{f}_a$.

Com centro em $\mathbf{F}_{\mathbf{i}a}$ descreve-se o arco $\mathbf{O}_{\mathbf{r}p}\mathbf{O}_{\mathbf{r}a}$.

Tendo $\mathbf{O}_{\mathbf{r}a}$ o exercício desenvolve-se como o exercício resolvido 05.

7) Controlo dimensional – método das cordas de arco.

<u>Problema:</u>

Considere um sistema perspéctico em que é conhecida a Linha do Horizonte e a distância do Observador ao Quadro (dada pela circunferência de distância **[d]**).

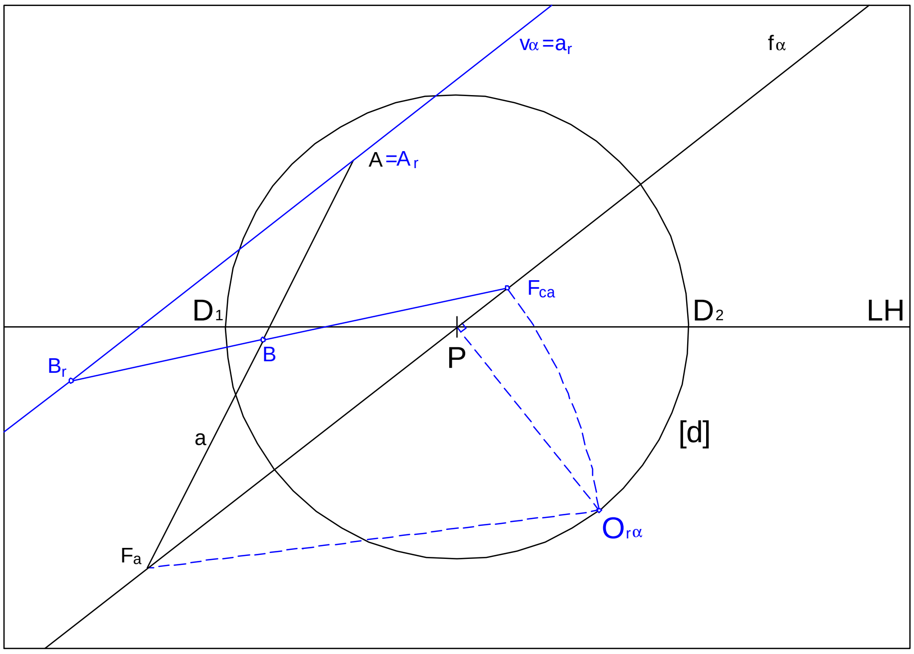
Considere a recta **a**, pertencente a um plano a de topo, passante por um ponto **A** situado no quadro.

Determine sobre a recta **a** a perspectiva de um segmento de recta **[AB]** conhecendo a sua verdadeira grandeza, sabendo que **B** fica no espaço real.

Resolução:

Para determinar a perspectiva do ponto **B** vai considerar-se a rotação da recta **a**, sobre o plano a, em torno do ponto **A** (porque **A** pertence ao quadro) até que esta fique em verdadeira grandeza e coincidente com $\mathbf{v}_a$.

Neste movimento de rotação, qualquer ponto da recta **a** descreve um arco de circunferência contido em a.



Todos os arcos de circunferência das rotações de qualquer ponto da recta **a** (ou de qualquer recta paralela à recta **a** contida no plano a ou em qualquer plano paralelo a a) têm a mesma amplitude, pelo que as rectas que contêm as cordas dos arcos têm todas a mesma direcção e por conseguinte o mesmo ponto de Fuga, $\mathbf{F_{ca}}$.

Para determinar o ponto $\mathbf{F_{ca}}$, considera-se a rotação da recta projectante com a direcção da recta **a**, no plano projectante com a orientação de a, em torno do ponto $\mathbf{F_a}$ até que esta fique coincidente com $\mathbf{f}_a$.

Neste movimento, o ponto **O** descreve um arco cuja corda tem a direcção pretendida. O extremo deste arco oposto a **O** pertence a $\mathbf{f}_a$ e é o ponto $\mathbf{F_{ca}}$, isto é, o ponto de fuga das cordas de arco (também pode ser designado por ponto de medição ou ponto de fuga de igual recepção).

Sobre $\mathbf{a_r}$º$\mathbf{v}_a$ marca-se o ponto $\mathbf{B_r}$ a uma didtância de $\mathbf{A_r}$º**A** correspondente à verdadeira grandeza pretendida.

Pelo ponto $\mathbf{B_r}$ conduz-se a recta $\mathbf{B_r.F_{ca}}$ que intersecta a recta **a** no ponto **B**.

8) Controlo dimensional – método das cordas de acro.

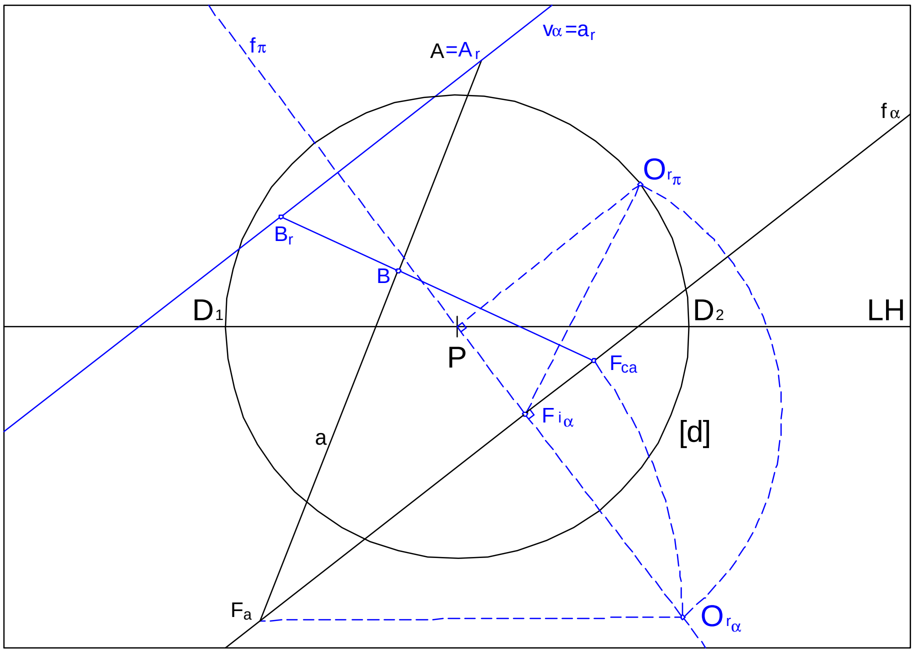
Problema:

Considere um sistema perspéctico em que é conhecida a Linha do Horizonte e a distância do Observador ao Quadro (dada pela circunferência de distância **[d]**).

Considere a recta **a**, pertencente a um plano a oblíquo, passante por um ponto **A** situado no quadro.

Determine sobre a recta **a** a perspectiva de um segmento de recta **[AB]** conhecendo a sua verdadeira grandeza, sabendo que **B** fica no espaço real.

<u>Resolução:</u>



A resolução deste exercício é em tudo semelhante à do exercício resolvido 07 residindo a diferença no rebatimento do plano projectante com a orientação a que neste caso é oblíquo (ver exercício resolvido 06).

9) Controlo direccional

<u>Problema:</u>

Considere um sistema perspéctico em que é conhecida a Linha do Horizonte e a distância do Observador ao Quadro (dada pela circunferência de distância **[d]**).

Considerando a perspectiva de um quadrado **[ABCD]** obtida nos termos do exposto no exercício resolvido 05, determine a perspectiva de um cubo que o admita como face.

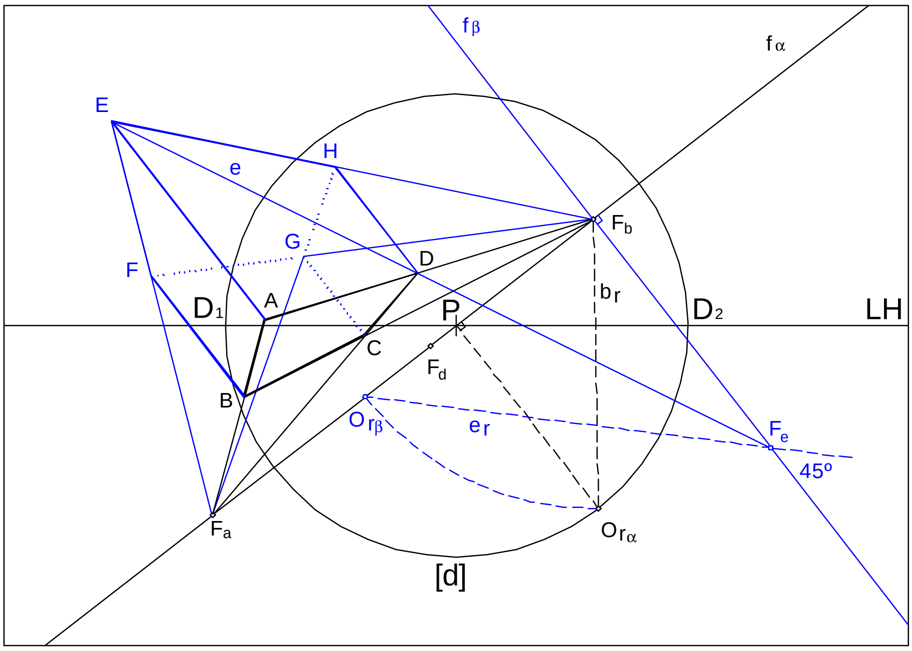
<u>Resolução:</u>

O quadrado **[ABCD]** está contido num plano de topo, pelo que as arestas perpendiculares ao referido plano são paralelas ao quadro, donde o traçado das rectas que as contêm é directo, sendo estas perpendiculares a $\mathbf{f}_a$.

A questão coloca-se, agora, em determinar a face **[EFGH]** de lados paralelos ao da face já representada.

Para determinar o vértice **E**, por exemplo, considera-se a orientação das faces **[AEHD]** e **[BFGC]** (que fica determinada pela linha de fuga $\mathbf{f}_b$ passante por $\mathbf{F_b}$ e perpendicular a $\mathbf{f}_a$, isto é, paralela às arestas **AE**, **BF**, **CG** e **DH**) que contém a direcção **e** da diagonal **DE**.

Rebatendo o plano projectante com a orientação b para o quadro (ver exercício resolvido 06) determina-se o ponto $\mathbf{O}_{\mathbf{r}b}$ pelo qual pode ser conduzida a recta $\mathbf{e_r}$ a 45º com $\mathbf{f}_b$ determinando o ponto $\mathbf{F_e}$.



Pelo ponto $\mathbf{F_e}$ pode conduzir-se a recta **e** que intersecta a recta **A.E** no ponto **E**.

A partir deste momento a resolução do exercício faz-se recorrendo ao paralelismo, isto é, rectas paralelas têm o mesmo ponto de fuga.

Note que existem duas perspectivas possíveis do cubo.

10) Controlo direccional.

<u>Problema:</u>

Considere um sistema perspéctico em que é conhecida a Linha do Horizonte e a distância do Observador ao Quadro (dada pela circunferência de distância **[d]**).

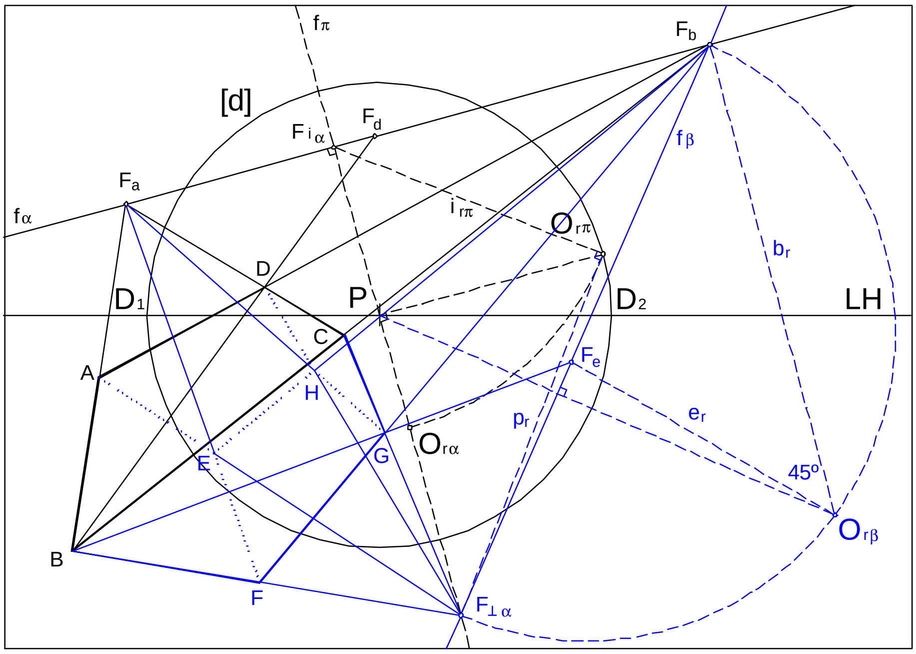
Considerando a perspectiva de um quadrado **[ABCD]** obtida nos termos do exposto no exercício resolvido 06, determine a perspectiva de um cubo que o admita como face.

<u>Resolução:</u>

O quadrado **[ABCD]** está contido num plano oblíquo, pelo que as arestas perpendiculares ao referido plano são também oblíquas ao quadro, donde o traçado das rectas que as contêm pressupõe a determinação do ponto de fuga da direcção **p** ortogonal à orientação a.

Começaremos por determinar este ponto de fuga que identificaremos por $\mathbf{F}_{\wedge a}$.

A recta projectante com a direcção **p** tem projecção ortogonal no quadro coincidente com f_π e é perpendicular à recta $\mathbf{i}_a$ º $\mathbf{F}_{ia}$**.O**, donde, tendo o plano projectante com orientação p rebatido para o quadro (ver exercício resolvido 06), se pode conduzir por $\mathbf{O}_{rp}$ a recta $\mathbf{p_r}$ determinando o ponto $\mathbf{F}_{\wedge a}$.



Pelo ponto **$F_{\wedge a}$** e pelos pontos **A**, **B**, **C** e **D** conduzem-se as perspectivas das rectas que contêm as perspectivas das arestas **[AE]**, **[BF]**, **[CG]** e **[DH]**.

Para determinar o ponto **G**, por exemplo, é preciso conhecer a direcção **e** da recta **B.G**.

Sabe-se que esta direcção está contida na orientação b definida pelos pontos **O**, **F_b** e **$F_{\wedge a}$**, donde, se se conduzir por **O** uma recta com a direcção **e**, esta deverá intersectar o quadro algures em **f_b** num ponto **F_e**.

Por outro lado sabe-se que a direcção **e** faz 45º com as direcções **b** e **p**.

Para determinar **F_e** considera-se o rebatimento do plano projectante com orientação b para o quadro (em torno de **f_b**). Como as rectas projectantes com as direcções **p** e **b** são perpendiculares entre si, então o ponto **O_{rb}** deverá estar contido na circunferência de diâmetro **[F_b $F_{\wedge a}$]** (existem duas posições possíveis) na sua intersecção com a recta perpendicular a **f_b** passante por **P**.

Determinado o ponto **O_{rb}** pode conduzir-se a recta **b_r** e, a 45º com esta, a recta **e_r**.
A recta er intersecta fβ no ponto Fe.

Pelo ponto **F_e** conduz-se a recta **F_e.B** que intersecta a recta **C. $F_{\wedge a}$** no ponto **G**.

A partir deste momento a resolução do exercício faz-se recorrendo ao paralelismo, isto é, rectas paralelas têm o mesmo ponto de fuga.

Note que existem duas perspectivas possíveis para o cubo.

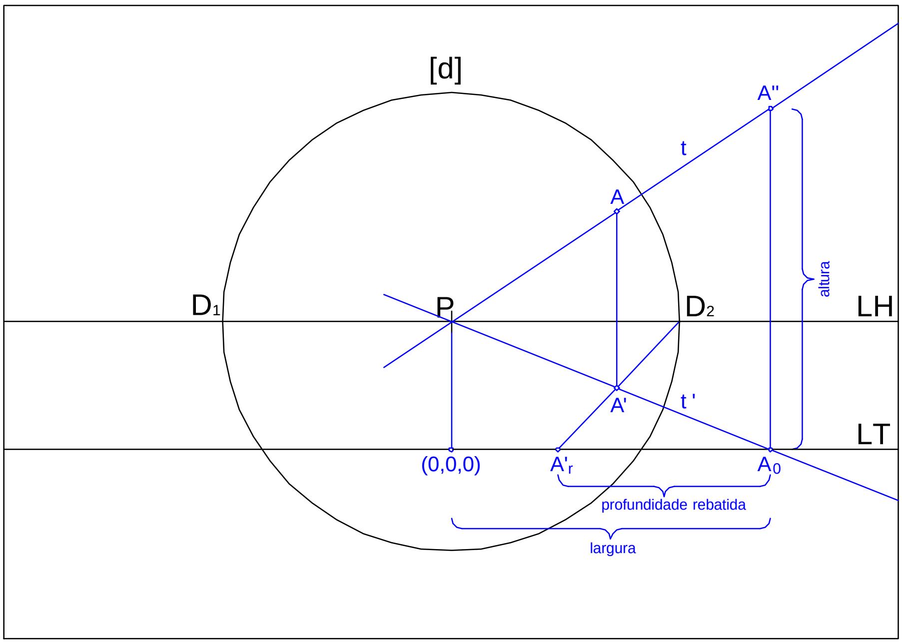
11) Representação de um ponto dadas as coordenadas.

Problema:

Considere um sistema perspéctico em que é conhecida a Linha do Horizonte e a distância do Observador ao Quadro (dada pela circunferência de distância **[d]**).

Determine a perspectiva de um ponto $\mathbf{A}_{(\mathbf{a},\ \mathbf{l},\ \mathbf{p})}$ em que **a**=altura ou cota, **l**=largura ou abcissa e **p**=profundidade ou afastamento.

Resolução:



A partir da origem das coordenadas marca-se sobre a Linha de Terra um ponto $\mathbf{A_0}$, representando a largura do ponto **A**, e na vertical de $\mathbf{A_0}$ marca-se um ponto **A''**, representando a altura do ponto **A**.

Pelo ponto **A''** conduz-se uma recta de topo **t** e pelo ponto $\mathbf{A_0}$ conduz-ze a recta **t'** (projecção horizontal de **t**).

Sobre a Linha de Terra, marca-se a partir de $\mathbf{A_0}$ a distância correspondente à profundidade determinando um ponto $\mathbf{A'_r}$.

Pelo ponto $\mathbf{A'_r}$ conduz-se uma recta de nível a 45º com o quadro transportandoa profundidade para a recta **t'**, identificando nesta o ponto **A'**, sobre cuja vertical se encontra **A** na recta **t**.

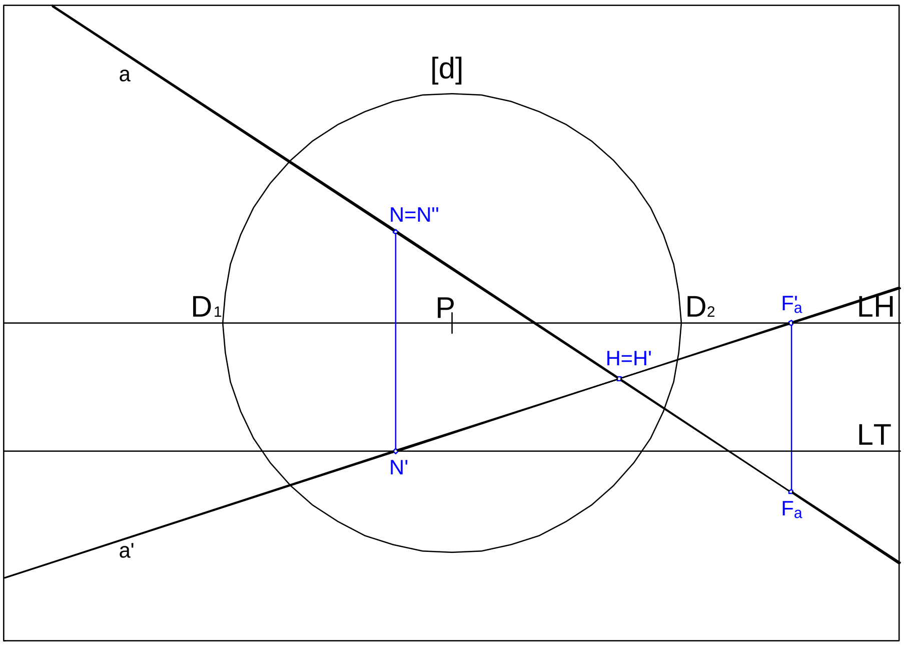
12) Determinação dos pontos notáveis de uma recta.

Problema:

Considere um sistema perspéctico em que é conhecida a Linha do Horizonte e a distância do Observador ao Quadro (dada pela circunferência de distância **[d]**).

Dada a perspectiva de uma recta **a**, determine os seus traços (no quadro e no geometral) e o seu ponto de fuga.

Resolução:



O ponto de nascença da recta, ou traço vertical (traço no quadro), é o ponto **N** de profundidadde 0, pelo que a sua projecção horizontal **N’** se encontra na intersecção da recta **a’** com a **LT**. Na vertical de **N’** encontra-se o ponto **N** sobre a recta **a**.

O traço horizontal da recta, **H**, é o seu ponto de altura 0, pelo que se encontra na intersecção de **a’** com **a**. Logo **H**º **H’**.

O ponto de fuga da recta é um ponto do quadro que representa a projecção do seu ponto impróprio. Isto é, é a representação de um ponto de profundidade infinita. Daqui resulta que a perspectiva da sua projecção horizontal esteja contida na LH. Com efeito **F’$_a$** resulta da intersecção de **a’** com a **LH**. Sobre a vertical de **F’$_a$** encontra-se **F$_a$** sobre a perspectiva da recta **a**.

13) Determinação das rectas notáveis do plano.

Problema:

Considere um sistema perspéctico em que é conhecida a Linha do Horizonte e a distância do Observador ao Quadro (dada pela circunferência de distância **[d]**).

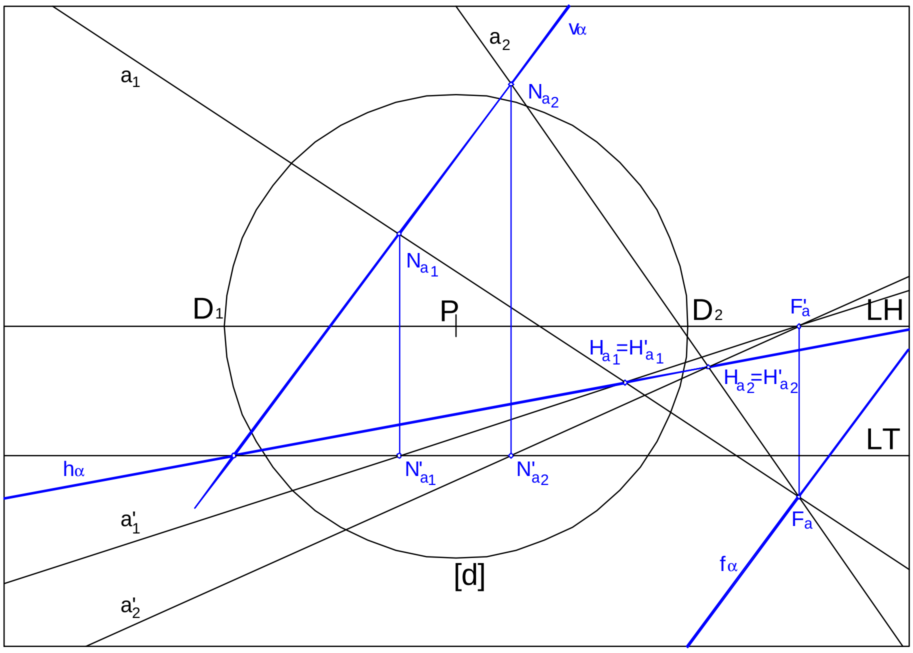
Definido um plano a por duas rectas **a$_1$** e **a$_2$**, determine os seus traços (no quadro e no geometral) e a sua linha de fuga.

Resolução:

O traço vertical do plano fica definido pelos traços verticais das rectas que o definem.

O traço horizontal do plano fica definido pelos traços horizontais das rectas que o definem.

A linha de fuga do plano fica definida pelos dois pontos de fuga das rectas que o definem.



Contudo deve notar-se que, em geral, não é necessário ter todos estes elementos para definir as rectas notáveis do plano.

Deve ainda notar-se que os traços vertical e horizontal são concorrentes num ponto da LT; o traço horizontal é concorrente com a linha de fuga num ponto da LH; e o traço vertical é paralelo à linha de fuga.

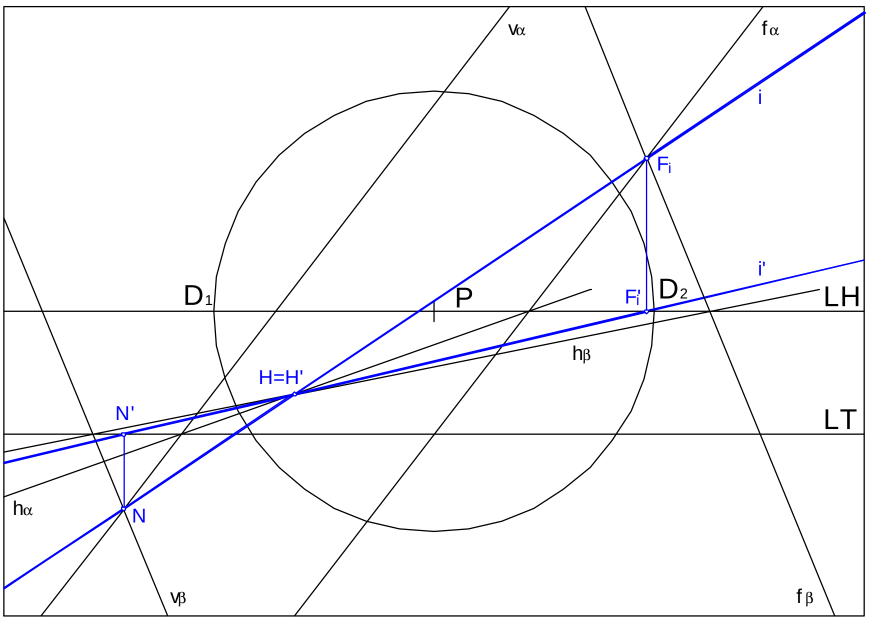
14) Intersecção entre dois planos.

<u>Problema:</u>

Considere um sistema perspéctico em que é conhecida a Linha do Horizonte e a distância do Observador ao Quadro (dada pela circunferência de distância **[d]**).

Dados dois planos a e b, determine a recta **i** de intersecção entre os dois planos.

<u>Resolução:</u>



O traço vertical, **N**, da recta de **i** fica determinado pela intersecção dos traços verticais dos planos.
O traço horizontal, **H**, da recta de **i** fica determinado pela intersecção dos traços horizontais dos planos.
O ponto de fuga, **F$_i$**, da recta **i** fica determinado pela intersecção das linhas de fuga dos planos.

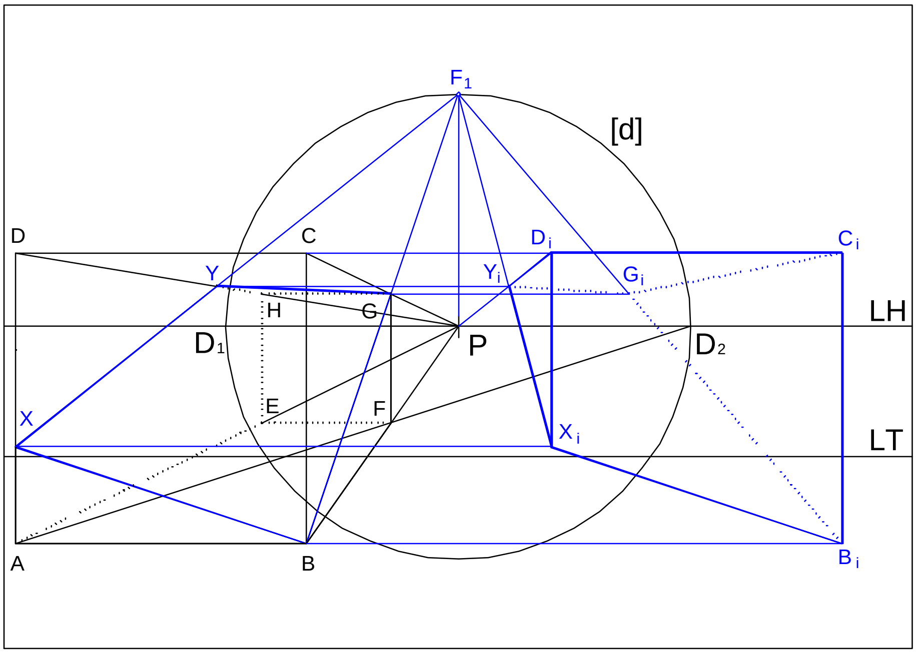
Contudo deve notar-se que não é necessário ter três pontos para definir uma recta.

15) Secção/translacção.

Problema:

Considere um sistema perspéctico em que é conhecida a Linha do Horizonte e a distância do Observador ao Quadro (dada pela circunferência de distância **[d]**). É também conhecida a altura do Observador. Considerando a perspectiva de um cubo **[ABCDEFGH]** nos termos da figura (duas faces de nível, duas faces de perfil e duas faces de frente), determine a secção produzida no cubo por um plano a passante pelos vértices **B** e **G**, e por um ponto **X** a 1/3 da altura entre **A** e **D**. De seguida efectue uma translacção da parte superior do cubo segundo a direcção fronto-horizontal no sentido da esquerda para a direita.

Resolução:



Pertencendo à mesma face os pontos **B** e **G** pode conduzir-se a recta **B.G** cujo ponto de fuga, **F$_1$**, se situa na intersecção da circunferência **[c]** com a vertical de **P**. Note-se que a recta **B.G** é uma recta de perfil ascendente a 45º com o quadro.

Pertencendo à mesma face os pontos **B** e **X** pode conduzir-se a recta **B.X** que é frontal.

Como a face **[ADHE]** é paralela à face **[BCGF]**, então a recta de intersecção do plano a com o plano da face **[ADHE]** é paralela à recta **B.G**, pelo que tem o mesmo ponto de fuga, **F$_1$**.

Conduzida a recta **X.F$_1$** determina-se o ponto **Y** na sua ntersecção com a aresta **[DH]**.

Pertencendo à mesma face os pontos **Y** e **G** pode conduzir-se a recta **Y.G**, o que permite fechar a linha delimitadora da secção.

Quanto à translação, note-se que não está definida nenhuma distância.
Note-se, ainda, que numa translacção se mantém o paralelismo.

Começaremos por arbitrar uma translacção para o ponto **B** definindo $\mathbf{B_i}$.

De seguinda conduz-se o segmento $\mathbf{B_iX_i}$ paralelo ao segmento **[BX]** (o que pode ser feito directamente uma vez que são frontais).

Pelos pontos $\mathbf{X_i}$ e $\mathbf{B_i}$ conduzem-se as rectas $\mathbf{X_i.F_1}$ e $\mathbf{B_i.F_1}$ paralelas às rectas $\mathbf{X.F_1}$ e $\mathbf{B.F_1}$.

Sobre a recta $\mathbf{X_i.F_1}$ encontra-se o ponto $\mathbf{Y_i}$ que pode ser determinado pela intersecção desta recta com a fronto-horizontal conduzida pelo ponto **Y**.

Sobre a recta $\mathbf{B_i.F_1}$ encontra-se o ponto $\mathbf{G_i}$ que pode ser determinado pela intersecção desta recta com a fronto-horizontal conduzida pelo ponto **G**, ou pela intersecção de uma destas rectas com a recta de topo conduzida por $\mathbf{C_i}$ (o ponto $\mathbf{C_i}$ determina-se de forma semelhante a $\mathbf{X_i}$).

Para concluír o exercício seguem-se procedimentos semelhantes.

16) Rotações.

Problema:

Considere um sistema perspéctico em que é conhecida a Linha do Horizonte e a distância do Observador ao Quadro (dada pela circunferência de distância **[d]**).
Considerando a perspectiva de um prisma **[ABCDEFGH]** nos termos da figura (duas faces de nível, duas faces verticais a.p.d. e duas faces verticais a.p.e.), efectue uma rotação de 90º do mesmo em torno da recta fronto-horizontal, **h**, passante pelo ponto vértice **A**.

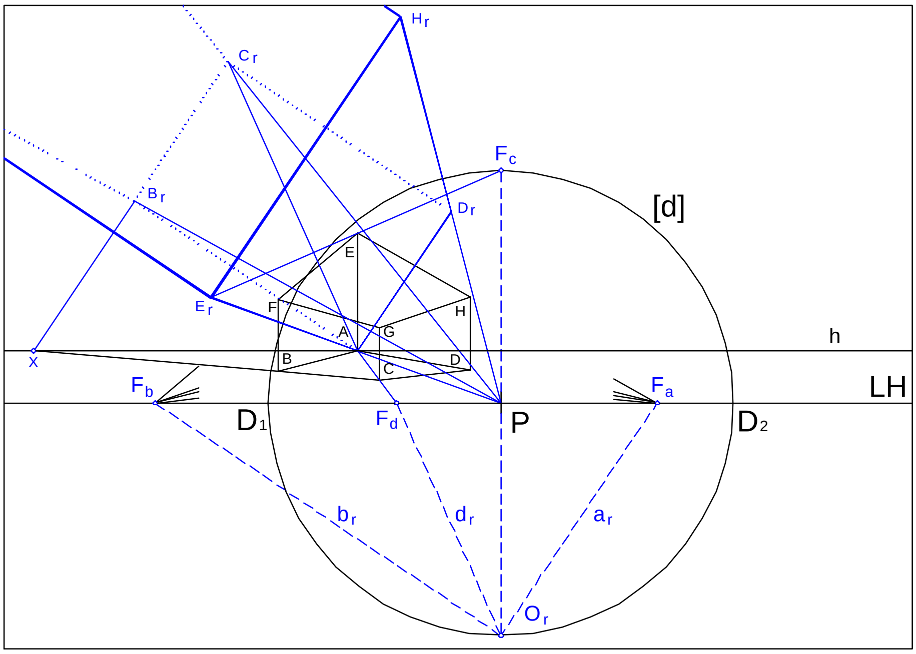
Resolução:

Note-se que não está definido nehum sentido para a rotação pelo que este é indiferente.

Note-se que as rectas verticais quando sujeitas a uma rotação de 90º em torno de uma recta fronto-horizontal ficam de topo; e as rectas de nível, quando sujeitas à mesma rotação, ficam frontais.

Comecemos por determinar a rotação da aresta **[AE]**. Como esta é vertical e o ponto **A** pertence ao eixo da rotação, então o ponto $\mathbf{A_r}$° **A** e $\mathbf{[A_rE_r]}$ está contida na recta de topo passante por **A**.
Sendo a rotação de 90º, conduz-se pelo ponto **E** uma recta de perfil (neste caso arbitrou-se ascendente) a 45º com o quadro que intersecta a recta de topo conduzida por $\mathbf{A_r}$° **A** no ponto $\mathbf{E_r}$. Esta recta de perfil contém a corda do arco da rotação do ponto **E**.

Pelo ponto **A_rº A** passam as arestas **[A_rB_r]** e **[A_rD_r]**. Como determinar as suas direcções?



Se considerarmos uma rotação de 90º do plano do horizonte em torno da **LH** no mesmo sentido da rotação do prisma, determinamos, sobre o quadro (orientação frontal), as rectas **a_r** e **b_r** cujas direcções correspondem às direcções das arestas **[ArDr]** e **[ArBr]**, respectivamente.

Por **A_r** conduzimos uma recta paralela a **b_r**, na qual se encontrará **B_r**, e uma recta paralela a **a_r**, na qual se encontrará **D_r**.

Como o eixo **h** da rotação é complanar com a face **[ABCD]** do prisma, se prolongarmos, por exemplo, a aresta **[BC]** determinamos, na sua intersecção com o eixo **h**, um ponto fixo **X**. Note-se que **Xº X_r**.

Pelo ponto **Xº X_r** passa uma recta paralela a **a_r** que intersecta a paralela a **b_r** conduzida por **A_r** no ponto **B_r**. Esta recta conterá o ponto **C_r**.

Para determinar o ponto **C_r** conduz-se por **A_rº A** uma recta com a direcção **d_r** (determinada de modo semelhante a **a_r** e **b_r**) que intersecta a recta paralela a **a_r** conduzida por **Xº X_r**.

Para completar a representação do prisma rodado recorre-se ao paralelismo (note que o desenho não coube todo na folha).

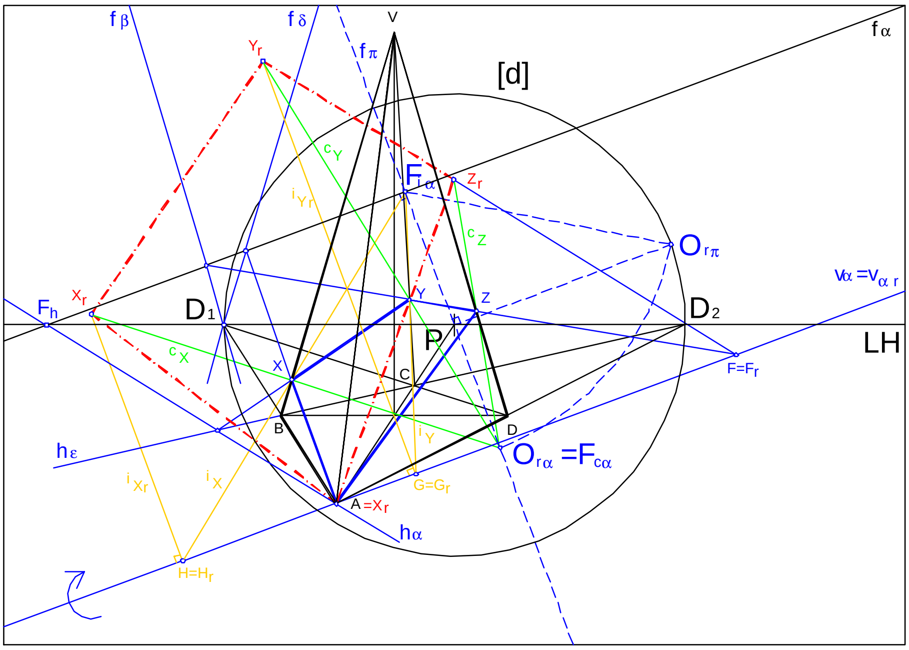
17) Secções/rebatimento.

<u>Problema:</u>

Considere um sistema perspéctico em que é conhecida a Linha do Horizonte e a distância do Observador ao Quadro (dada pela circunferência de distância **[d]**).

Considerando a perspectiva de uma pirâmide quadrangular regular com uma face **[ABCD]** horizontal, nos termos da figura, e sabendo que o vértice **A** pertence ao quadro, determine a verdadeira grandeza da seção produzida na pirâmide por um plano a com orientação dada por **f_a** passante por **A**.

Resolução:



Em primeiro lugar determinaremos a secção.

Vamos notar que a recta **A.B** é de nível a 45º a.p.e. com o quadro, pelo que o seu ponto de fuga é **D$_1$**.
Qualquer linha de fuga de qualquer plano que contenha recta **A.B** passará por **D$_1$**.

A recta **V.B** é frontal pelo que a linha de fuga de qualquer plano que a contenha ser-lhe-á paralela.

A linha de fuga do plano **A.V.B** (plano d), notada por **f**$_d$, passa, logicamente, por **D$_1$** e é paralela a **V.B**.

O ponto de fuga da recta de intersecção dos planos a e d é o ponto de intersecção das linhas de fuga **f**$_a$ e **f**$_d$. Por este ponto conduz-se a recta **A.X** que intersecta **[VB]** no ponto **X**.

Pelo ponto **X** passa a recta de intersecção dos planos a e **B.C.V** (plano e).
A recta de intersecção entre estes dois planos passa pelo ponto comum a **h**$_a$ e **h**$_e$ e intersecta a aresta **[VC]** no ponto **Y**.

A recta de intersecção entre os planos a e **C.D.V** (plano b) determina-se de modo semelhante à recta de intersecção entre os planos a e d. Esta recta intersecta intersecta a aresta **[VD]** no ponto **Z**.

Z.A é de determinação imediata.

Determinada a secção passamos à determinação da sua verdadeira grandeza.
Para o efeito vamos considerar o rebatimento do plano a para o quadro em torno do seu traço vertical **v**$_a$ que passa pelo ponto **A**.

Neste rebatimento todos os pontos do plano a descrevem arcos de circunferência contidos em planos perpendiculares à charneira, isto é, planos de topo com a orientação dada por $\mathbf{f}_p$.

Cada um deste planos, com orientação $\mathbf{f}_p$, intersecta o plano a segundo uma recta de maior inclinação **i** (cujo ponto de fuga $\mathbf{F_i}_a$ resulta da intersecção entre $\mathbf{f}_a$ e $\mathbf{f}_p$) e intersecta o quadro segundo uma recta $\mathbf{i_r}$ perpendicular a $\mathbf{v}_a$ (cujo traçado é directo). Note-se que esta recta corresponde à recta **i** rebatida para o quadro. Estas duas rectas têm um ponto em comum na charneira.

Por outro lado, todos os arcos de rebatimento têm a mesma amplitude, pelo que as rectas que passam pelos seus extremos são todas paralelas entre si, isto é, têm a mesma direcção e a elas corresponde apenas um ponto de fuga (considerado apenas um dos dois sentidos possíveis para o rebatimento), o ponto de fuga das cordas de arco do rebatimento de a, isto é, $\mathbf{F_c}_a$.

Para determinar o ponto $\mathbf{F_c}_a$ considera-se o rebatimento do plano projectante com a orientação de a para o quadro. Neste rebatimento, o ponto **O** descreve um arco cuja corda é paralela às cordas dos arcos do rebatimento de a. O arco do rebatimento do ponto **O** está contido no plano projectante com a orientação p.

Considerando o rebatimento do plano projectante com a orientação de p para o quadro determinamos o ponto $\mathbf{O_r}_p$. Note-se que neste rebatimento $\mathbf{F_i}_a$ º $\mathbf{F_i}_a\mathbf{r}$. Com centro no ponto $\mathbf{F_i}_a$ º $\mathbf{F_i}_a\mathbf{r}$ descreve-se o arco $\mathbf{O_r}_p$ $\mathbf{O_r}_a$. O ponto $\mathbf{O_r}_a$ coincide com o ponto de fuga $\mathbf{F_c}_a$ uma vez que pertence ao quadro e é um dos extremos do arco do rebatimento de **O**.

Determinemos, agora, o rebatimento do ponto **X**, por exemplo.
Por **X** conduz-se uma recta de maior inclinação do plano a, isto é, a recta $\mathbf{i_X}$.
A recta $\mathbf{i_X}$ intersecta $\mathbf{v}_a$ no ponto **H**º$\mathbf{H_r}$ por onde passa a recta $\mathbf{i_{Xr}}$ perpendicular a $\mathbf{v}_a$.
Por **X** conduz-se a recta $\mathbf{c_X}$ que contém a corda do arco do rebatimento de **X** e intersecta ir no ponto $\mathbf{X_r}$.
A recta $\mathbf{c_X}$ passa pelo ponto $\mathbf{F_c}_a$.

O ponto $\mathbf{Y_r}$ determina-se de forma análoga.

Para determinar o ponto $\mathbf{Z_r}$ pode notar-se que a recta **Y.Z** tem um ponto fixo na charneira, o ponto **F**º$\mathbf{F_r}$ por onde passa o seu rebatimento que fica definido pelos pontos **F**º$\mathbf{F_r}$ e $\mathbf{Y_r}$. Daqui resulta que é suficiente conduzir a recta $\mathbf{c_Z}$ que intersecta a recta $\mathbf{F_r.Y_r}$ no ponto $\mathbf{Z_r}$.

Fica assim determinada a verdadeira grandeza da secção (representada a vermelho na figura).

18) Reflexos/Teorema de Thalles

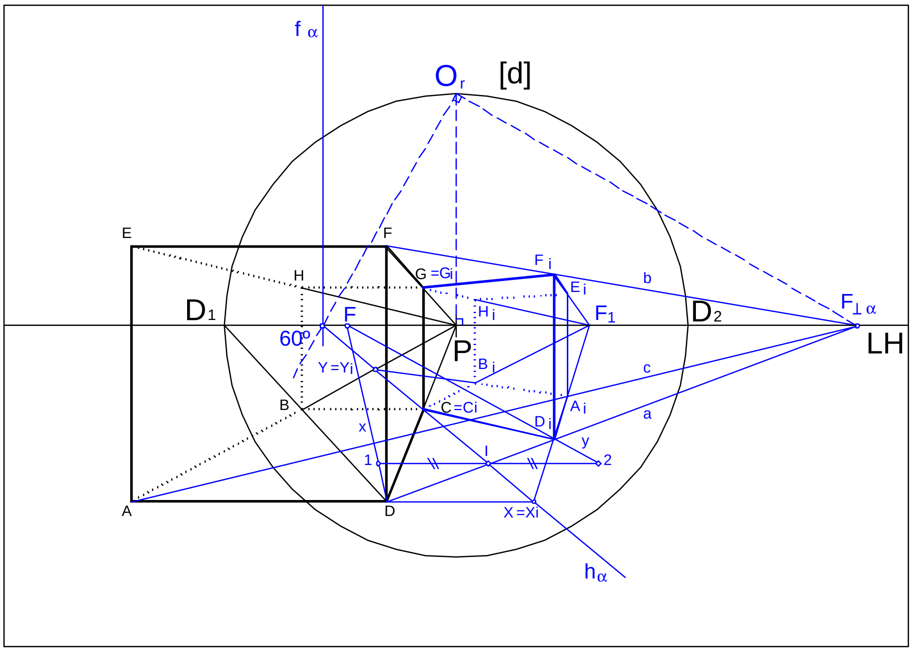
<u>Problema:</u>

Considere um sistema perspéctico em que é conhecida a Linha do Horizonte e a distância do Observador ao Quadro (dada pela circunferência de distância **[d]**).

Considerando a perspectiva de um cubo, nos termos da figura (duas faces de nível, duas faces de perfil e duas faces de frente), determine o reflexo do cubo produzido por um espelho vertical a 60º a.p.d. com o quadro passante pela aresta **[GC]**.

Considere a face inferior contida no geometral.

<u>Resolução:</u>



Determinar o reflexo de um objecto produzido por um espelho plano equivale a determinar a imagem de um objecto simétrico do objecto dado relativemante ao plano do espelho.

Para o efeito é preciso considerar a direcção ortogonal ao espelho.

Por cada ponto conduz-se uma recta perpendicular ao espelho; determina-se, sobre a recta, a distância do ponto ao espelho; e de seguida duplica-se essa distância para “o outro lado” do espelho.

Em primeiro lugar determinamos o ponto das rectas perpendiculares ao plano do espelho, isto é, $\mathbf{F}_{\wedge a}$.

Como o espelho é vertical, a direcção que lhe é ortogonal é de nível.

Comecemos por determinar o reflexo do ponto **D**, por exemplo.

Por **D** conduzimos uma recta perpendicular ao plano a , isto é, uma recta cujo ponto de fuga é $\mathbf{F}_{\wedge a}$.

Neste caso trata-se de uma recta à cota 0 que intersecta o plano a num ponto **I** pertencente a $\mathbf{h}_a$.

Para duplicar a distância **DI** far-se-á uso do teorema de Thalles.

Pelo ponto **I** conduz-se uma recta fronto-horizontal.

Sobre a recta fronto-horizontal marca-se um ponto **1** qualquer distinto de **I**.

Une-se o ponto **1** ao ponto **D** definindo uma recta **x** cujo ponto de fuga será **F** (a azul).

A partir de **I** marca-se sobre a recta fronto-horizontal um ponto **2** simétrico de **1**.

Conduz-se pelo ponto **2** uma recta **y** paralela a **x**.

A recta **y** intersecta a recta $\mathbf{D.F}_{\wedge a}$ no ponto $\mathbf{D_i}$ que é a perspectiva do ponto simétrico de **D** relativamente ao espelho.

Note-se que $\mathbf{C} \equiv \mathbf{C_i}$ e $\mathbf{G} \equiv \mathbf{G_i}$.
Note-se, também, que, como o espelho é vertical, as simétricas das arestas verticais são também rectas verticais, assim como as simétricas das rectas de nível são também rectas de nível (embora com outras direcções).

Sobre a vertical de $\mathbf{D_i}$ teremos o ponto $\mathbf{F_i}$ que pode ser determinado intersectando esta vertical com a recta $\mathbf{F.F}_{\wedge a}$.

Neste momento já pode ser traçada a face $\mathbf{[C_iD_iF_iG_i]}$ simétrica da face **[CDFG]**.

Prolongando a recta **A.D** determina-se, sobre $\mathbf{h}_a$, um ponto **X** pertencente ao espelho, isto é, $\mathbf{X} \equiv \mathbf{X_i}$.

Unindo $\mathbf{X_i}$ a $\mathbf{D_i}$ determina-se a recta que irá conter o ponto $\mathbf{A_i}$ que pode ser determinado intersectando esta recta com a recta $\mathbf{A.F}_{\wedge a}$.

A recta $\mathbf{A_i.D_i}$ tem um ponto de fuga $\mathbf{F_1}$ na **LH**.

Unindo $\mathbf{F_1}$ a $\mathbf{F_i}$ determina-se a recta que irá conter o ponto $\mathbf{E_i}$ (na vertical de $\mathbf{A_i}$).

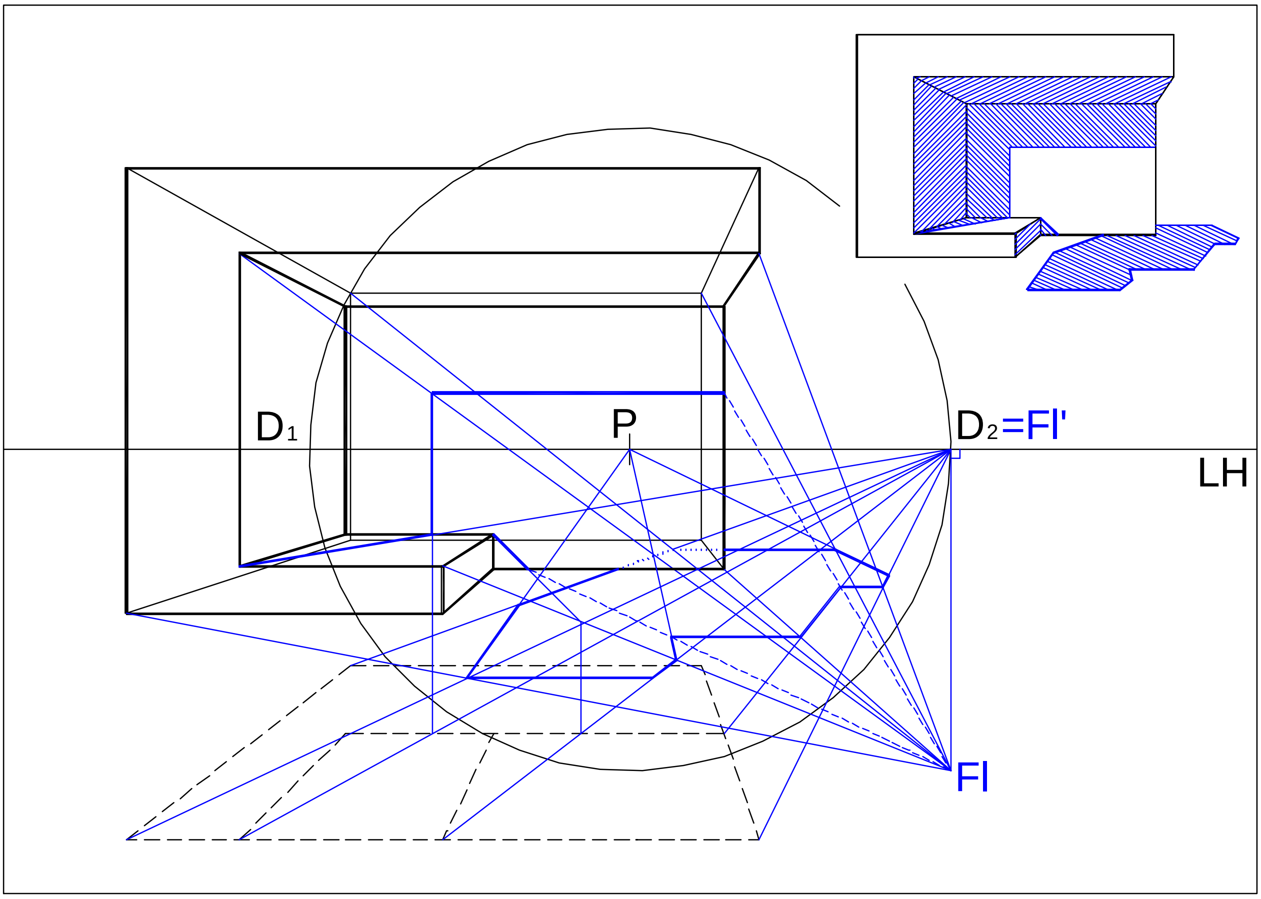
Neste momento já pode ser traçada a face $\mathbf{[F_iD_iA_iE_i]}$ simétrica da face **[FDAE]**.

Para completar o reflexo os procedimentos são semelhantes aos já descritos.

19) Sombras.
<u>Problema:</u>
Considere um sistema perspéctico em que é conhecida a Linha do Horizonte e a distância do Observador ao Quadro (dada pela circunferência de distância **[d]**).
Considerando a perspectiva de um sólido (com faces de nível, de frente e de perfil), nos termos da figura (a projecção horizontal econtra-se a traço interrompido a preto) determine as sombras própria, auto-produzida e produzida no geometral considerando a direcção luminosa convencional.

<u>Resolução:</u>
Para resolução deste problema limitar-nos-emos a enunciar os princípios gerais.

Para determinar a sombra de um ponto no geometral conduz-se pela sua projecção horizontal uma recta com a direcção da projecção horizontal da direcção luminosa, **l’**, e pelo ponto uma recta com a direcção luminosa, **l**. A sombra do ponto no geometral é o traço horizontal da recta **l**, isto é, o ponto de intersecção entre as rectas **l** e **l’**.



Com efeito a sombra de um ponto numa superfície qualquer é sempre a intersecção da recta luminosa que por ele passa com essa superfície.

Uma recta paralela a um plano tem sombra nesse plano com a sua direcção. Por exemplo, a sombra de uma recta de topo no geometral é sempre uma recta de topo.

20) Restituição perspéctica.

Problema:

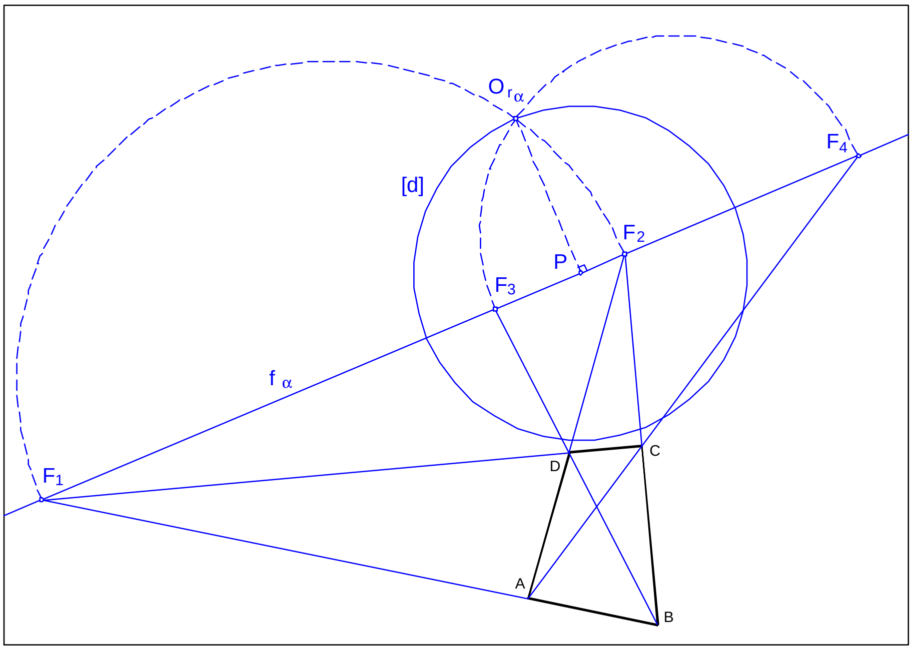
Sabendo que o quadrilátero **[ABCD]** é a perspectiva de um quadrado contido num plano perpendicular ao quadro, determine o ponto **P**, a distância do Observador ao Quadro e a circunferência de distância **[d]**.

Resolução:

Prolongando os lados do quadrilátero que se sabe corresponderem a lados paralelos do quadrado determinam-se os pontos $\mathbf{F_1}$ e $\mathbf{F_2}$.

Os pontos $\mathbf{F_1}$ e $\mathbf{F_2}$ determinam a linha de fuga $\mathbf{f}_a$ correspondente à orientação do plano que contém o quadrado.

Prolongando as diagonais do quadrilátero determinam-se os pontos $\mathbf{F_3}$ e $\mathbf{F_4}$ sobre a linha de fuga $\mathbf{f}_a$.



Tratando-se da perspectiva de um quadrado sabe-se que os pares **F_1** e **F_2**, e, **F_3** e **F_4** correspondem a direcções ortogonais entre si.

Sendo a orientação a ortogonal ao quadro então o ponto **P** deverá estar contido em **f_a**.

Considerando o rebatimento do plano projectante com a orientação a, o ponto **O_{ra}** deverá ser o ponto comum à semi-circunferência de diâmetro **[F_1F_2]** e à semi-circunferência de diâmetro **[F_3F_4]**.

Conduzindo por **O_{ra}** uma recta perpendicular a **f_a** determina-se na intersecção das duas o ponto **P**.

Com centro em **P** e raio **[PO_{ra}]** descreve-se a circunferência de distância **[d]**.

21) Restituição perspéctica.

<u>Problema:</u>

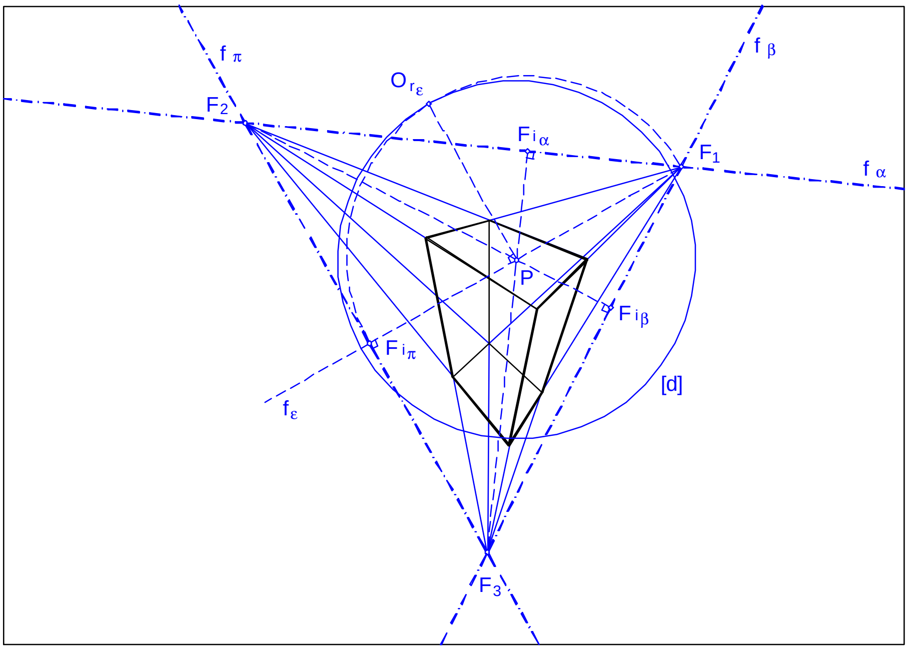
Sabendo que a figura corresponde à perspectiva de um paralelepípedo, determine o ponto **P**, a distância do Observador ao Quadro e a circunferência de distância **[d]**.

<u>Resolução:</u>

Prolongando os segmentos que se sabe corresponderem a arestas paralelas, determinam-se os pontos **F_1**, **F_2** e **F_3**.

Tratando-se da perspectiva de um paralelepípedo, os pontos **F_1**, **F_2** e **F_3** correspondem a direcções ortogonais entre si, pelo que o ponto **P** é o ortocentro do triângulo **[F_1, F_2,F_3]**.

Cada par de pontos determina a linha de fuga de uma orientação de planos ortogonal à direcção definida pelo o outro ponto.



$\mathbf{F_1}$ e $\mathbf{F_2}$ determinam $\mathbf{f}_a$.

$\mathbf{F_2}$ e $\mathbf{F_3}$ determinam $\mathbf{f}_p$.

$\mathbf{F_1}$ e $\mathbf{F_3}$ determinam $\mathbf{f}_b$.

As rectas conduzidas pelos pontos $\mathbf{F_1}$, $\mathbf{F_2}$ e $\mathbf{F_3}$, perpendiculares à respectiva linha de fuga oposta determinam nesta os pontos de fuga das rectas de maior inclinação.

Considerando, por exemplo, o rebatimento para o quadro do plano projectante com a orientação simultaneamente ortogonal ao quadro e a p, isto é, a orientação definida pela linha de fuga $\mathbf{f}_e$ (determinada por $\mathbf{F_1}$ e $\mathbf{F}_{ip}$) determina-se o ponto $\mathbf{O}_{re}$ na intersecção da semi-circunferência de diâmetro **[**$\mathbf{F_1}$**.**$\mathbf{F}_{ip}$**]** com a perpendicular a $\mathbf{f}_e$ conduzida por **P**.

Com centro em **P** e raio **[P.**$\mathbf{O}_{re}$**]** descreve-se a circunferência de distância **[d]**.